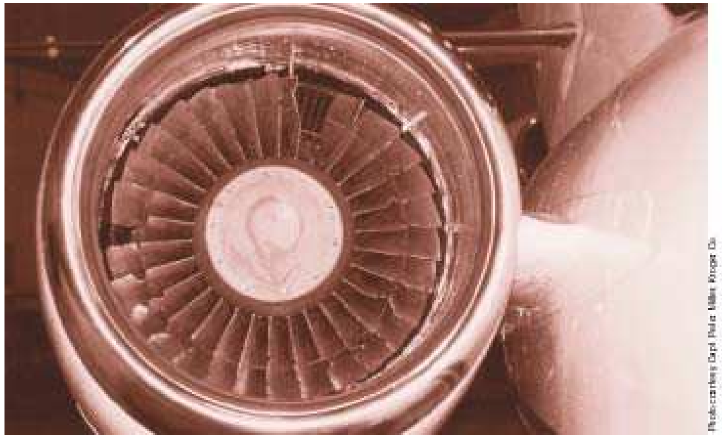
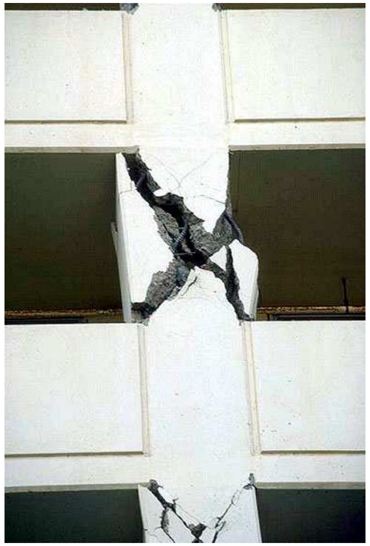
Datenanalyse und Statistik

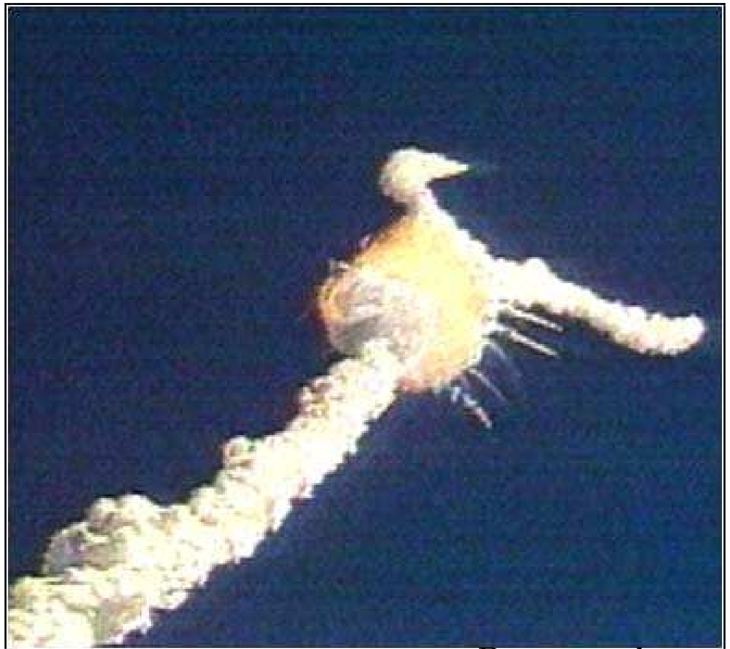
Vorlesung WT 1 Stochastische Modellbildung

K.Gerald van den Boogaart
http://www.stat.boogaart.de

Zufall? Planung? Determinismus?







Feynman was a key player in finding the cause of the Challenger explosion
10 years ago (CNN)

Stochastik

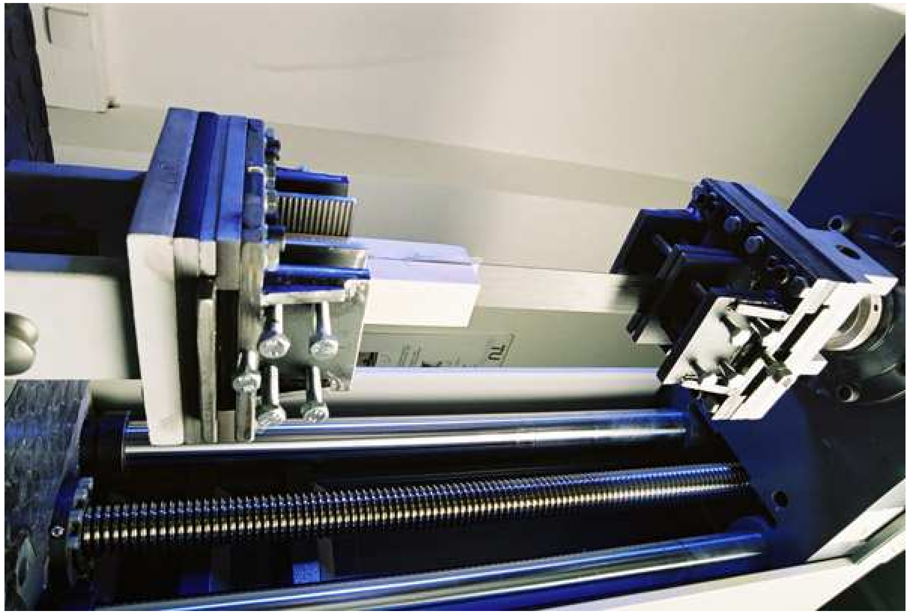
- gr. die Kunst des Vermutens
- Die Wissenenschaft von den Gesetzen des Zufalls.
- Triff Aussagen über das Unvorhersehbare.

Stochastik

- In dieser Vorlesung haben mindestens zwei Leute am gleichen Tag Geburtstag.
- Beim Rolett gewinnt langfristig die Bank.
- Was schief gehen kann und immer wieder versucht wird, wird schließlich schief gehen.
- Was gelingen kann und immer wieder versucht wird, gelingt schließlich.
- Redundante Systeme sind wesentlich zuverlässiger.

Beispiel I

Bruchversuch and der TU Wien (C) TU Wien



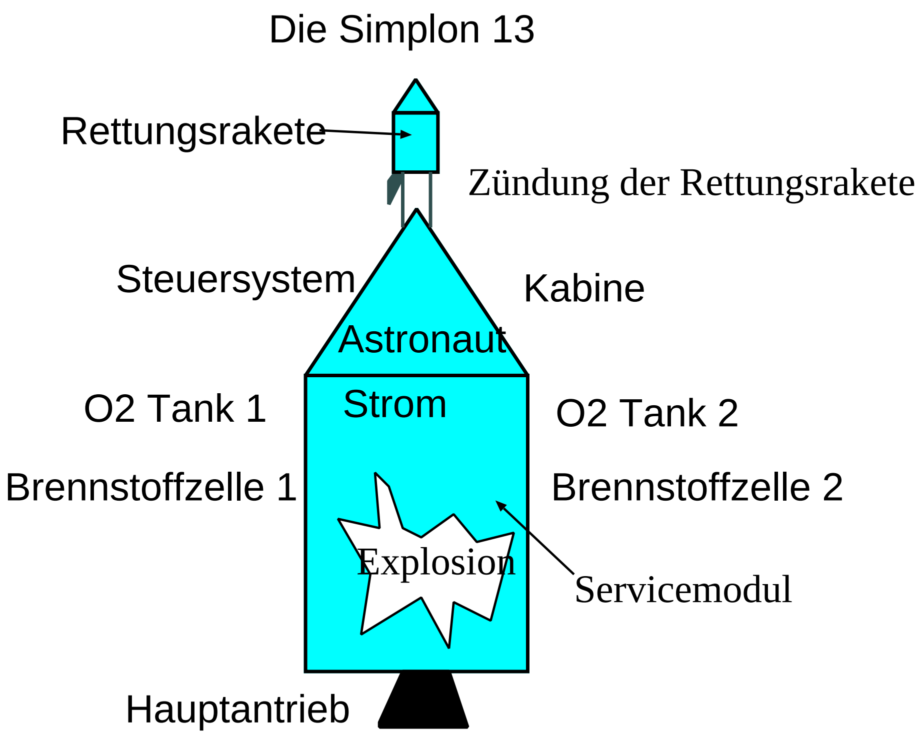
Beispiel II

Ein Würfelspiel

Beispiel III

Qualitätskontrolle bei der Metrogruppe

Spielbeispiel



Flugplan der Simplon

- Simplon startet von Cape Audimax um 14:13.
- Alle Konzepte werden stark vereinfacht.
- Bei Fehlfunktion des Hauptantriebs wird die Rettungsrakete gezündet und die Simplon landet sanft im Meer der Fragen.
- Ansonsten tritt die Simplon planmäßig um 15:30 in den freien Raum ein.
- Der Flug der Simplon ist ein gedachtes Zufallsexperiment und kann beliebig oft mit verschiedenem Ausgang wiederholt werden.

Gesetze für die Simplon

- *Alles kann kaputt gehen.
- Ohne Hauptantrieb stürzt die Simplon ab.
- Ohne O2 Tanks keine Strom und keine Lebenserhaltung.
- Ohne Brennstoffzellen kein Strom.
- Ohne Strom keine Steuerungssystem.
- Ohne Steuerungssystem kein Hauptantrieb und keine Rettungsrakete.
- *Pilot überlebt einen Absturz wahrscheinlich, wenn die Rettungsrakete zündet.
- *Eine (eventuelle) Explosion zerstört die Bauteile im Servicemodul.

Grundbegriffe der Stochastik

- **Ereignis** E

$$E = \text{Es gibt eine Explosion im Servicemodul.}$$

$$R = \text{Rettungsrakete ist intakt.}$$

- **Zufall**
  Es muß keine Explosion geben.
- **Wahrscheinlichkeit** $P(E)$ ist Wert in [0,1].

$$P(E) = 0.05$$

- **Stochastische Unabhängigkeit**
  $R \perp E$, die Explosion beeinflußt die Rettungsrakete nicht.

Grundbegriffe der Stochastik

- **Ereignis** A
  Eine Aussage über Unbekanntes.
  Ist nicht was man im Alltag darunter versteht.
- **Zufall**
  Warum hat dieser Krebs und ich nicht?
- **Wahrscheinlichkeit** $P(A)$ ist Wert in [0,1].
  Maßzahl des Unvorhersehbaren.
- **Stochastische Unabhängigkeit**
  Ein Annahme über die Blindheit des Zufalls.

Ereignis

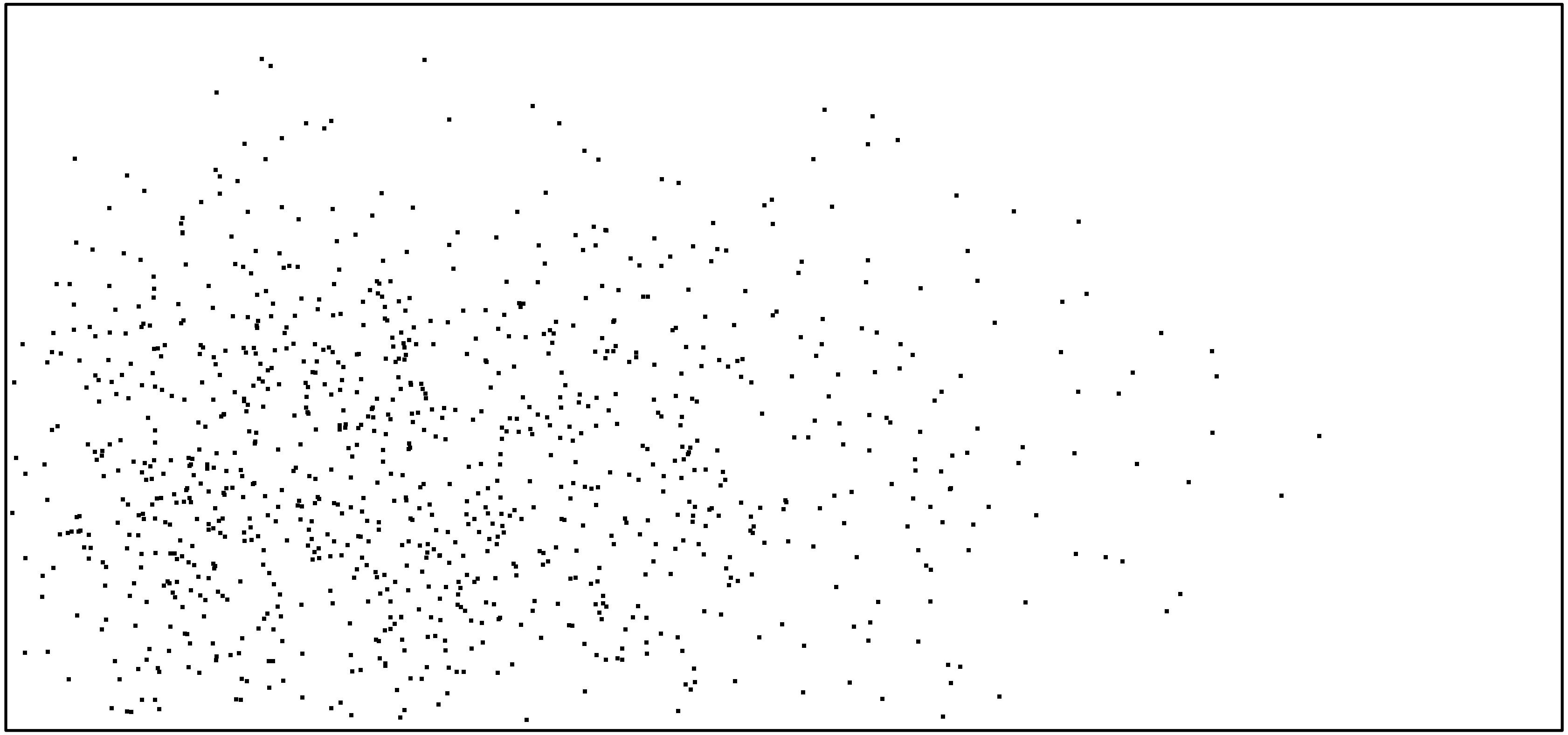
- **Def:** Ein **Ereignis** A ist eine Aussage, über den Ausgang eines Zufallsexperiments, die erfüllt sein kann oder auch nicht.
  * $A_1 =$Der Stahl bricht vor 200kN.
  * $A_2 =$Es wurde ein 6-er Pasch gewürfelt.
  * $A_3 =$Das beprobte Fleischstück hat Salmonellen
- Erweist sich die Aussage nach der Durchführung des Experiments als wahr, so sagt man "das Ereignis **ist eingetreten**".
  * $A_1 =$Der Stahl bricht vor 200kN. (nicht eingetreten)
  * $A_2 =$Es wurde ein 6-er Pasch gewürfelt. (eingetreten)
  * $A_3 =$Das zufällig ausgesuchte Fleischstück hat Salmonellen (nicht eingetreten)
- Ob ein Ereignis eintritt oder nicht, bestimmt der Zufall.

Beispiele für Ereignisse

- U=Die Umlaufbahn wurde erreicht.
- M=Mission war erfolgreich (Lebender Astronaut in Umlaufbahn).
- O_1=Sauerstoff Tank 1 war (die ganze Zeit) intakt.*
- E=Es fand eine Explosion statt.*
- RE=Rettungsrakete wurde erfolgreich gezündet.
- H_{5min}=Der Hauptantrieb ist bis 5min nach Start nicht ausgefallen.

Grundlagen und Rechenregeln

Grundgesamtheit



Ω = Menge der Möglichkeiten

Ereignisse auf der Simplon

- E=Es findet eine Explosion statt.*
- O_1=Sauerstoff Tank 1 ist intakt*
- O_2=Sauerstoff Tank 2 ist intakt*
- B_1=Brennstoffzell 1 ist betriebsbereit*
- B_1=Brennstoffzell 2 ist betriebsbereit*
- SI=Steuerungscomputer ist intakt*
- RI=Rettungsrakete ist intakt*
- HI=Hauptantrieb ist intakt*

Weitere Ereignisse auf der Simplon

- O=Sauerstoffversorgung funktioniert=$O_1 \cup O_2$
- B=Brennstoffzellen betriebsbereit=$B_1 \cup B_2$
- S=Stromversorgung wird aufrecht erhalten=$O \cap B$
- SA=Steuerungscomputer arbeitet$= SI \cap S$
- H=Hauptantrieb arbeitet$= SA \cap HI$
- Z=Zündung der Rettungsrakete erfolgt=$H^c \cap SA$
- RA=Rettungsrakete arbeitet=$RI \cap Z$
- A=Astronaut überlebt $= (H \dot{\cup} RA) \cap O$.
- U=Umlaufbahn wird erreicht$= H \cap RA^c$
- M=Mission erfolgreich=$A \cap U$

Zusammenfassung

Wir haben gelernt:

- Was ist ein Ereignis?
- Formale Logik für Ereignisse.
- Rechenregeln der Logik
- Begriff der Wahrscheinlichkeit
- Grundrechenregeln die für alle Wahrscheinlichkeiten gelten.
- Bedingte Verteilung als Blick auf eine Teilgesamtheit.
- Modellbildung: Stochastische Unabhängigkeit

Wir fassen nun das Gelernte nochmal durch Formeln zusammen.

Grundbegriffe der Logik/Mengenlehre

- $A^c = \Omega \setminus A =$ nicht $A = \neg A$
- $A \cap B = A$ und $B =$ Sowohl A als auch B
- $A \cup B = A$ oder B
- $A \setminus B = A \cap B^c = A$ aber nicht B
- $A \triangle B = A\text{xor}B = A \setminus B \cup B \setminus A =$ Entweder A oder B
- Das sichere Ereignis: $A \cup A^c = A \triangle B = \Omega$
- Das unmögliche Ereignis: $A \cap A^c = \emptyset$
- $(A \cup B)^c = (A^c \cap B^c) =$ Weder A noch B
- $(A \cap B)^c = (A^c \cup B^c) =$ Nicht beides
- $A \supset B \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A$ impliziert$B$
- $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \triangle B = A \cup B \Leftrightarrow A, B$unvereinbar

Wahrscheinlichkeit

- Die **Wahrscheinlichkeit** $P(A)$ ist eine Zahl im Intervall $[0, 1]$, die beschreibt, wie sicher das Ereignis eintritt.

$$P(A_3) = 0.02$$

- Es gibt verschiedene philosophische Grundkonzepte was Wahrscheinlichkeit ist.
  * als Anteil an der Grundgesamtheit
  * als Grenzwert unendlich vieler Versuchswiederholungen
  * als Grad subjektiver Überzeugung
  * als Naturgesetz eines zufälligen Prozesses
  * als Modellgröße
- Es gibt gewisse Grundrechenregeln, die den Konzepten gemeinsam sind.

Kolmogorovsche Axiome

Axiome für Wahrscheinlichkeiten:

- $P(A) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Folgerungen/Rechenregeln:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Stochastische Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A_1, A_2 heißen **stochastisch unabhängig**, wenn

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

In Zeichen: $A_1 \perp A_2$
Das ist gleichbedeutend mit

- $A_1 \perp A_2^c$, $A_1^c \perp A_2$, $A_1^c \perp A_2^c$
- $P(A_2|A_1) = P(A_2) = P(A_2|A_1^c)$
- $P(A_2^c|A_1) = P(A_2^c) = P(A_2^c|A_1^c)$

Mehrfache stochastische Unabhängigkeit

Mehrere Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heißen **stochastisch unabhängig**, wenn für alle Kombinationen von $k_1, \ldots, k_n \in \{„c“, „“\}$:

$$P(A_1^{k_1} \cap \cdots \cap A_n^{k_n}) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n)$$

Ereignisse werden als stochastisch unabhängig modelliert, wenn sie auf Zufallsursachen zurückgehen, die sich in der Realität gegenseitig nicht beeinflussen.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

- $P(B|A) =$ Wahrscheinlichkeit von B gegeben A
- $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$
- $P(B \cap A) = P(B|A)P(A)$
- Mit bedingten Wahrscheinlichkeiten kann man genauso rechnen wie mit unbedingten, da sie sich einfach auf eine Teilmenge beziehne.
- Gelten die Unabhängigkeitsformeln für die bedingten Wahrscheinlichkeiten von $A_1, \ldots, A_n$ gegeben B, so heißen sie bedingt unabhängig:

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_m}|B) = P(A_1|B)P(A_2|B) \cdots P(A_n|B)$$

Beispiel Simplon

Große Aufgabe:
Wie lauten die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse bei einem Flug der Simplon:

- A=Astronaut überlebt $= (H \dot{\cup} RA) \cap O$.
- M=Mission erfolgreich=$A \cap U$

und was kann man tun, um die Erfolgsaussichten zu erhöhen?

Gegeben: ???

Allgemeine Lösungstrategien

- Problem der Ausfallmöglichkeiten ignorieren:
  Immer wieder laut vor sich hin murmenln: Unser Raumschiff hat keine Fehler, unser Raumschiff hat keine Fehler,. . .
- Kopf in den Sand stecken.
- In einem anderen Arbeitszweig Arbeit suchen. z.B. Abfallwirtschaft, Atomindustrie, Sicherheitsystemebau, Medizintechnik,. . .
- Aufgabe an jungen Mitarbeiter delegieren.
- Risikoastronauten buchen.
- Insistieren, dass in den Klausuren, ja nur vereinfachte Beispiele drankommen.
- Arbeitsgruppe “Risikoeinschätzung” bilden und mit mehreren Politikern besetzten.

Allgemeine Lösungstrategien

- Kühlen Kopf bewahren.
- Aufgabe in Teilaufgaben zerlegen.
- Einige Teilaufgaben delegieren.
- Konzeptionelles Modell des Risikos beim Raumschiff entwickeln.
- Eventuelle Modell zunächst vereinfachen.
- Nötige Vorinformationen identifizieren.
- Nötige Vorinformationen aus verschiedenen Quellen zusammensuchen.
- Wahrscheinlichkeitsrechnung schrittweise anwenden.

Modellbildung am Beispiel

Der erste Schritt ist die Modellbildung:

- Einzelne Komponenten können aus verschiedenen Gründen ausfallen:
  Innerer Defekt,
  Störung oder Zerstörung durch externen Einfluss,
  (hier: Explosion)
  fehlende Betriebsvoraussetzungen. (hier: fehlender Strom, fehlende Steuerung)
- Innere Defekte treten stochastisch unabhängig voneinander auf.
- Zwischen Ereignissen bestehen gewisse logischen Beziehungen.

Was brauchen wir?

Wir brauchen also:

- Wahrscheinlichkeiten für innere Defekte. (Woher?)
- Wahrscheinlichkeitsmodelle für externe Zerstörung.
- Modellierung der logischen Beziehungen, die durch fehlenden Betriebsvoraussetzungn entstehen.
- Logische Formulierung der Abhängigkeit von Ereignissen

Komponentenereignisse auf der Simplon

- E=Es findet eine Explosion statt.*
- O_1=Sauerstoff Tank 1 ist intakt*
- O_2=Sauerstoff Tank 2 ist intakt*
- B_1=Brennstoffzell 1 ist betriebsbereit*
- B_1=Brennstoffzell 2 ist betriebsbereit*
- SI=Steuerungscomputer ist intakt*
- RI=Rettungsrakete ist intakt*
- HI=Hauptantrieb ist intakt*

Sind diese Ereignisse stochastisch unabhängig?
Nein, da eine Explosion O2-Tanks und Brennstoffzellen zerstören würde.

Bedingtes Modell

- Gegeben es findet eine Explosion statt (E), so
  - O2-Tanks und Brennstoffzellen werden zerstört: $P(O_1|E) = 1$
  - SI, RI, HI bleiben unberührt: z.B. $P(SI|E) = P(SI)$
  - Die Ereignisse $O_1, O_2, B_1, B_2, SI, RI, HI$ sind stochastisch unabhängig gegeben E
- Gegeben es findet keine Explosion statt (E^c), so
  - Sind $O_1, O_2, B_1, B_2, SI, RI, HI$ stochastische unabhängig (gegeben E.
  - Die Komponentenzuverlässigkeiten ergeben sich aus ihren inneren beim Zulieferer spezifizierten Zuverlässigkeiten.

Komponentenzuverlässigkeit auf der Simplon

Innere Zuverlässigkeiten der Einzelsysteme:

- $P(E) = 0.001$: Es findet eine Explosion statt.*
- $P(O_1|E^c) = 0.99$: Sauerstoff Tank 1 ist innerlich intakt*
- $P(O_2|E^c) = 0.99$: Sauerstoff Tank 2 ist innerlich intakt*
- $P(B_1|E^c) = 0.99$: Brennstoffzell 1 ist innerlich betriebsbereit*
- $P(B_2|E^c) = 0.99$: Brennstoffzell 2 ist innerlich betriebsbereit*
- $P(SI) = 0.9999$: Steuerungscomputer ist intakt*
- $P(RI) = 0.95$: Rettungsrakete ist intakt*
- $P(HI) = 0.97$: Hauptantrieb ist intakt*

Modellvorstellung: Diese Ereignisse sind gegeben E und ge-

Woher bekommt man W'keiten?

- Quellen
  - Durch die Verantwortlichen für die Teilmodule (delegieren)
  - Spezifizierte Zuverlässigkeit (festlegen)
  - Literatur (finden)
- Subjektiv
  - Erfahrung, Einschätzungen (Was mit der Zeit kommt)
- Objektiv
  - Schätzung aus relativen Häufigkeiten (statistisch)
  - Wahrscheinlichkeitsrechnung (was gerade lernen)
  - Verteilungen und Toleranzgrenzen (was wir später lernen)

Logische Beziehungen zwischen Ereignissen

- O=Sauerstoffversorgung funktioniert=$O_1 \cup O_2$
- B=Brennstoffzellen betriebsbereit=$B_1 \cup B_2$
- S=Stromversorgung wird aufrecht erhalten=$O \cap B$
- SA=Steuerungscomputer arbeitet$= SI \cap S$
- H=Hauptantrieb arbeitet$= SA \cap HI$
- Z=Zündung der Rettungsrakete erfolgt=$H^c \cap SA$
- RA=Rettungsrakete arbeitet=$RI \cap Z$
- A=Astronaut überlebt $= (H \dot{\cup} RA) \cap O$.
- U=Umlaufbahn wird erreicht$= H \cap RA^c$
- M=Mission erfolgreich=$A \cap U$

Weiteres Vorgehen

- Jetzt können wir schrittweise versuchen mit den erlernten Zusammenhängen die Wahrscheinlichkeiten auszurechen.
- Wir müssen jeweils überlegen, welche Ereignisse unabhängig sind.
- Es scheint sinnvoll die Rechnungen für den Fall mit und ohne Explosion getrennt durchzuführen.
- Wir betrachten zunächsten den Fall E mit Explosion.

Gegeben E

- $P(O_1|E) = P(O_2|E) = P(B_1|E) = P(B_2|E) = 0$
  gesucht: $P(O|E) = P(O_1 \cup O_2|E)$ Sauerstoffversorgung
- $P(O|E) = P(O_1 \cup O_2|E) =$
  $\underbrace{P(O_1|E)}_{0} + \underbrace{P(O_2|E)}_{0} - \underbrace{P(O_1 \cap O_2|E)}_{\geq 0} = 0$
  gesucht: $P(B|E) = P(B_1 \cup B_2|E)$ Brennstoffzellen
- $P(B|E) = P(B_1 \cup B_2|E) =$ genauso $= 0$
  gesucht: $P(S|E) = P(B \cap O)$ Stromversorgung
- $P(S|E) = P(B \cap O|E) \leq P(B|E) = 0$
  gesucht: $P(SA|E) = P(SI \cap SA)$ Steuerung arbeitet
- $P(SA|E) = P(SI \cap S|E) \leq P(S|E) = 0$
  gesucht: $P(H|E), P(Z|E), P(R|E), \ldots$ Hauptantrieb, Rettungsrakete,...
- $P(H|E) = P(Z|E) = P(R|E) = P(A|E) = P(M|E) =$

Folgerung

Bei extremen Wahrscheinlichkeiten, zeichnet die Wahrscheinlichkeitsrechung einfach logische Schlussweisen nach.

Weiter

Wir betrachten nun den Fall E^c, dass keine Explosion stattfindet.

Zunächst wollen wir wissen, wie wahrscheinlich die Sauerstoffversorgung ausfällt.

Redundante Sauerstofftanks

Gesucht: $P(O|E^c)$
$P(O|E^c) = P(O_1$ oder $O_2|E^c)$
Die Sauerstofftankes sind stochastisch unabhängig (gegeben E^c)

$$\begin{aligned} P(O|E^c) &= P(O_1 \cup O_2|E^c) \\ \text{Oder-Regel} &= P(O_1) + P(O_2) - P(O_1 \cap O_2) \\ \text{Unabhängigkeit} &= P(O_1) + P(O_2) - P(O_1)P(O_2) \\ \text{Einsetzen} &= 0.99 + 0.99 - 0.99 \cdot 0.99 \\ \text{Ausrechen} &= 0.99 + 0.99 - 0.9801 = 0.9999 \end{aligned}$$

Der Weg über das Gegenereignis

Gesucht: $P(O|E^c)$
$P(O|E^c) = P(O_1$ oder $O_2|E^c)$
Die Sauerstofftankes sind stochastisch unabhängig (gegeben E^c).

$$\begin{aligned}
P(O|E^c) &= P(O_1 \cup O_2|E^c) \\
\text{Gegenereignis} &= 1 - P((O_1 \cup O_2)^c|E^c) \\
\text{De Morgan} &= 1 - P(O_1^c \cup O_2^c|E^c) \\
\text{Unabhängigkeit} &= 1 - P(O_1^c|E^c)P(O_2^c|E^c) \\
\text{Gegenereignis} &= 1 - (1 - P(O_1|E^c))(1 - P(O_2^c|E^c)) \\
\text{Einsetzen} &= 1 - (1 - 0.99)(1 - 0.99) \\
\text{Rechnen} &= 1 - 0.01 \cdot 0.01 \\
\text{Rechnen} &= 1 - 0.0001 \\
\text{Rechnen} &= 0.9999
\end{aligned}$$

Redundante Systeme/Parallelschaltung

Allgemein
Schaltet man n **unabhängige** Systeme $i = 1, \ldots, n$ mit Ausfallwahrscheinlichkeit p_i so zusammen, dass das Gesamtsystem nur ausfällt, wenn alle Systeme einzeln ausfallen, so können wir das wie folgt beschreiben:

- $A_i =$ System i fällt aus
- $P(A_i) = p_i$
- $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n =$ Gesamtsystem fällt aus
- Die $A_1, \ldots, A_n$ sind stochastisch unabhängig.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n) = p_1 p_2 \cdots p_n$$

- Haben die Einzelsystem die gleiche Ausfallwahrscheinlichkeit p, so gilt:

$$P(A) = p^n$$

Bedingte Ausfallwahrscheinlichkeiten

Mit dieser Theorie gilt also für den Fall ohne Explosion:

$$P(O|E^c) = 1 - P(O^c|E^c) = 1 - 0.01^2 = 0.9999$$

$$P(B|E^c) = 1 - P(B^c|E^c) = 1 - 0.01^2 = 0.9999$$

So lassen sich die Ausfallwahrscheinlichkeiten viel schneller berechnen.

Abschätzungen bei Abhängigkeit

- Was passiert, wenn die System **nicht unabhängig** ausfallen?
- **Schlimmster Fall**: Ausfälle treten gemeinsam auf Charge entweder gut oder schlecht.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \leq \min_i P(A_i)$$

- **Bester Fall**: Ausfälle schließen sich aus.
Ist Ventil a kaputt, so liegt an Ventil b kaum Druck an.

$$0 \leq P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

- **Aber**: Vorsicht: Modellierungsfehler
Was passiert, wenn sich die Bauteile im Defektfall gegenseitig zerstören?

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$

nversorgung braucht Sauerstoff und Brennstof

Wie zuverlässig ist die Stromversorung?
gesucht: $P(S) = P(O \cap B)$
Sehr einfach bei Unabhängigkeit:

$$P(S) = P(O \cap B) = P(O)P(B) = 0.9999 \cdot 0.9999 = 0.99980001$$

Frage: Sind O und B stochastische unabhängig (gegeben E^c)?

Das Unabhängigkeitprinzip

- **Frage:** Sind O und B stochastische unabhängig (gegeben E^c)?
- **Intuitiv:** Ja, da sie nur von stochatisch unabhängigen Ursachen abhängen.
- **Mathematisch:** Ereignisse, die sich als logische Ausrücke in verschiedene Ereignissen schreiben lassen, die stochastisch unabhängig sind, sind wieder stochastisch unabhängig.

Mehrteilige System/Reihenschaltung

Allgemein
Schaltet man n **unabhängige** Systeme $i = 1, \ldots, n$ mit Ausfallwahrscheinlichkeiten p_i so zusammen, dass das Gesamtsystem ausfällt sobald eines der Systeme ausfällt, so könne wir das wie folgt modellieren:

- $A_i =$ System i fällt aus
- $P(A_i) = p_i$, $P(A_i^c) = 1 - p_i = q_i$
- $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n =$ Gesamtsystem fällt aus
- Die $A_1, \ldots, A_n$ sind stochastisch unabhängig.

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c) \\ &= 1 - q_1 q_2 \cdots q_n \end{aligned}$$

- Haben die Einzelsystem die gleiche Ausfallwahrscheinlichkeit p, so gilt:

Reihenschaltung bei Abhängigkeit

- Was passiert, wenn die System **nicht unabhängig** ausfallen?
- **Schlimmster Fall**: Ausfälle schließen sich aus
  z.B. wenn der erste Ausfall sofort zum Abbruch führt.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

- **Bester Fall**: Ausfälle treten gemeinsam auf.
  z.B. wenn beide Ausfälle von der gleichen Ursache abhängen.

$$\max_i P(A_i) \leq P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$

- **Aber**: Vorsicht: Modellierungsfehler
  Was passiert, wenn sich die Bauteile im Defektfall gegenseitig zerstören?

Weiter Ereignisse (gegeben E^c)

- $P(O|E^c) = P(O_1 \cup O_2|E^c) = 0.9999$ Sauerstoffversorgung funktionier
- $P(B|E^c) = P(B_1 \cup B_2|E^c) = 0.9999$ Brennstoffzellen betriebsbereit
- $P(S) = 1 - 0.9999^2 = 0.99980001$ Stromversorgung wird aufrecht erhalten
- $P(SA) = P(SI \cap S)$ Steuerungscomputer arbeitet

$$P(SA) = P(SI)P(S) = 0.9998001 * 0.9999 \approx 0.9997$$

- $P(H) = P(SA \cap HI)$ Hauptantrieb arbeitet

$$P(H) = P(SA)P(HI) = P(SA) * 0.97 \approx 0.969709$$

- $P(Z) = H^c \cap SA$=Zündung der Rettungsrakete erfolgt Problematisch: Hier keine Unabhängigkeit.

Zündung der Rettungsrakete

- Modell:
  Problem: H^c und SA sind abhängig.
  Wir müssen uns etwas ausdenken:
- z.B.: Es gilt sogar $H \subset SA$
- Also $P(Z|E^c) = P(SA \cap H^c|E^c) = P(SA \setminus H|E^c) = P(SA|E^c) - P(H|E^c) \approx 0.9997 - 0.969709 = 0.029991$

Allgemeinere Idee

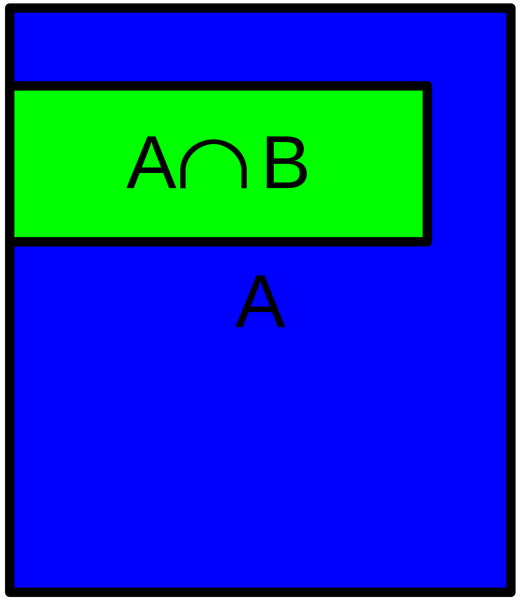
Allgemeinere Idee: Bedingen an gemeinsamen Ursachen

- $P(Z|SA^c \cap E^c) = P(H^c \cap SA|SA^c \cap E^c) = 0$
  Weil SA und SA^c sich ausschließen.
-

$$\begin{aligned}
P(Z|SA|E^c) &= P(H^c \cap SA|SA|E^c) \\
&= \frac{P(H^c \cap SA \cap SA|E^c))}{P(SA|E^c)} \\
&= P(H^c|SA|E^c) \\
&= P((HI \cap SA)^c|SA|E^c) \\
&= P(HI^c \cup SA^c|SA|E^c) \\
&= \frac{P((HI^c \cup SA^c) \cap SA|E^c)}{P(SA|E^c)} \\
&= P(HI^c|SA|E^c)
\end{aligned}$$

Totale Wahrscheinlichkeit

Bedingte W'keit von B gegeben A



$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Satz: (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit
Seien $A_1, \ldots, A_n$ unvereinbare Ereignisse mit

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n = \Omega$$

So gilt für jedes B:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n)$$

Zündung der Rettungsrakete

- Bekannt $P(Z|SA|E^c) = 1 - P(HI) = 1 - 0.97 = 0.03$
  $P(Z|SA^c|E^c) = 0$
  $P(SA|E^c) \approx 0.9997$
  $P(SA^c|E^c) \approx 0.0003$
- Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit
  $P(Z|E^c) = 0.9997 * 0.03 + 0.0003 * 0 = 0.029991$

Weiter Ereignisse (gegeben E^c)

- $P(RA|E^c) = P(RI \cap Z|E^c)$ Rettungsrakete arbeitet $= P(Z|E^c) * P(RI) = 0.029991 * 0.95 \approx 0.02849$
- A=Astronaut überlebt $= (H \dot\cup RA) \cap O$.
  Zunächst $H \dot\cup RA$ sind unvereinbar:
  $$P(H \dot\cup RA) = P(H) + P(RA) = 0.969709 + 0.02849 \approx 0.9982$$
- Wenn O^c, dann kein Strom und somit kein RA und keine H also:
  $O \subset H \dot\cup RA$ und somit $(H \dot\cup RA) \cap O = H \dot\cup RA$.
  Also:
  $$P(A) = 0.9982$$
- U=Umlaufbahn wird erreicht$= H \cap RA^c$
  RA und H unvereinbar, also $RA^c \subset H$
  $P(U|E^c) = P(H|E^c) = 0.969709$
- M=Mission erfolgreich$= A \cap U$

Totale Wahrscheinlichkeiten

- $P(A) = P(E)P(A|E) + P(E^c)P(A|E^c) = 0.001 * 0 + 0.999 * 0.9982 \approx 0.9972$
- $P(M) = P(E)P(M|E) + P(E^c)P(M|E^c) = 0.001 * 0 + 0.999 * 0.969709 \approx 0.9687$

Beobachtungen

$$1 - 0.9687 \approx \underbrace{0.03}_{P}(HI^c) + \underbrace{0.001}_{P(E)} + \underbrace{0.0001}_{P(O^c)} + \underbrace{0.0001}_{P(B^c)} + \underbrace{0.0001}_{P(SI^c)}$$

- Redundante Systeme sind erheblich zuverlässiger.
- Der nichtredundate Hauptantrieb domiert die Ausfallwahrscheinlichkeit.
- Gemeinsame Ursachen (Explosion) steigern die Ausfallwahrscheinlichkeit relevant
- Abhängige Systeme sind anfälliger.
- Rettungsystem hat Überlebenschancen beträchtlich gesteigert.

Zusammenfassung

- Modellierung
- Redundante Systeme
- Reihensysteme
- Totale Wahrscheinlichkeit
- Einfach kreativ Rechen
- Rechenregeln der Logik ausnutzen.