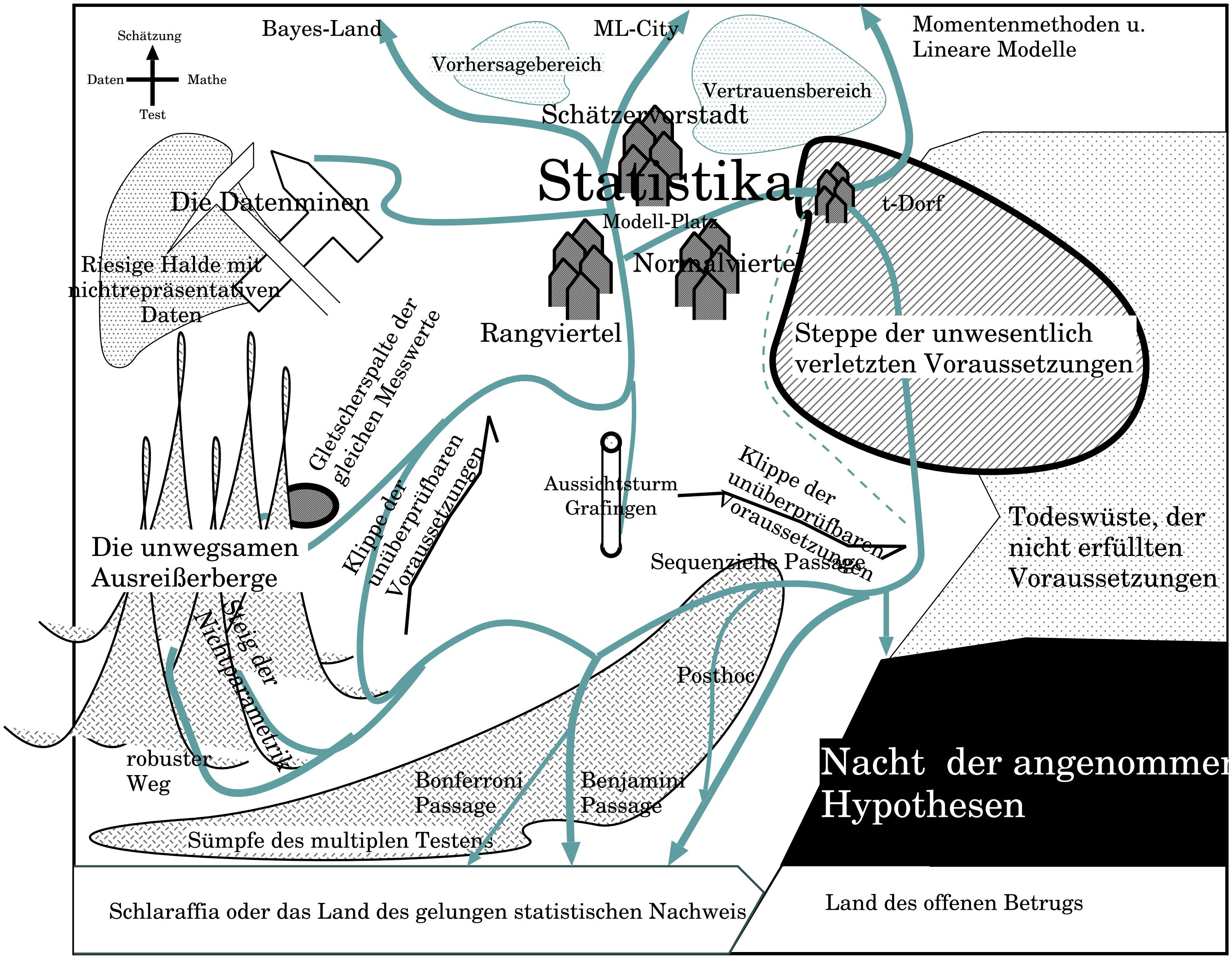
Statistik

Vorlesung 6 (Tests II)

K.Gerald van den Boogaart

http://www.math-inf.uni-greifswald.de/statistik


Schätzung
Daten
Mathe
Test
Bayes-Land
ML-City
Momentenmethoden u.
Lineare Modelle
Vorhersagebereich
Vertrauensbereich
Schätzervorstadt
Statistika
Modell-Platz
t-Dorf
Die Datenminen
Riesige Halde mit
nichtrepräsentativen
Daten
Normalviertel
Rangviertel
Steppe der unwesentlich
verletzten Voraussetzungen
Gletscherspalte der
gleichen Messwerte
Klippe der
unüberprüfbaren
Voraussetzungen
Aussichtsturm
Grafingen
Klippe der
unüberprüfbaren
Voraussetzungen
Todeswüste, der
nicht erfüllten
Voraussetzungen
Die unwegsamen
Ausreißerberge
Sequenzielle Passage
Steig der
Nichtparametrik
Posthoc
robuster
Weg
Bonferroni
Passage
Benjamini
Passage
Nacht der angenommen
Hypothesen
Sümpfe des multiplen Testens
Schlaraffia oder das Land des gelungen statistischen Nachweis
Land des offenen Betrugs

Der Test im Computer

```
> EinfacherGauss.test <- function(x, mean = 0, var = 1) {
+     parameter <- c(mean = mean, sd = sqrt(var))
+     statistic <- c(T = x)
+     structure(list(data.name = deparse(substitute(x)), method =
+         alternative = "greater", parameter = parameter, statisti
+         p.value = 1 - pnorm(statistic, mean = parameter["mean"],
+             sd = parameter["sd"])), class = "htest")
+ }
> EinfacherGauss.test(9.46, mean = 7.5, var = 1)

        Ein Stichproben Gauss-Test


data:  9.46
T = 9.46, mean = 7.5, sd = 1.0, p-value = 0.025
alternative hypothesis: greater
```

Ein Test hat

- Namen
  (hier: einfacher einseitiger Gauss-Test)

Ein Test hat

- Namen
- Anwendungssituation

  Überprüfen ob der wahre Erwartungswert einen festen Wert (hier 7,5) übersteigt, wenn eine normalverteilte Messung mit bekannter Varianz σ^2 vorliegt.

Ein Test hat

- Namen
- Anwendungssituation
- Hypothese und Alternative
  $H_0 : \mu = 7,5$ vs. $H_1 : \mu > 7,5$

Ein Test hat

- Namen
- Anwendungssituation
- Hypothese und Alternative
- Voraussetzungen
  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Ein Test hat

- Namen
- Anwendungssituation
- Hypothese und Alternative
- Voraussetzungen
- Ein Entscheidungsverfahren
  Meist im Computer implementiert.

Die Testsituationen

Die Testsituationen werden nach mehrere Kriterien unterteilt:

- **Anzahl der beteiligten Stichproben**
- **Zu testende Größe**
- **Art der Alternative**
- **Art der Voraussetzungen**
- **Anzahl der beteiligten Merkmale**

Beteiligte Stichproben

- **Einzelbeobachtung**
  z.B. ein einzelner Messwert, wie im Beispiel

Beteiligte Stichproben

- **Einzelbeobachtung**
- **Ein-Stichproben-Tests**
  Es werden Eigenschaften einer Grundgesamtheit untersucht, z.B. wenn das Labor mehrere Messungen gemacht hat.

Beteiligte Stichproben

- **Einzelbeobachtung**
- **Ein-Stichproben-Tests**
- **Zwei-Stichproben-Tests**
  wenn zwei Grundgesamtheiten verglichen werden sollen (z.B. behandelte und unbehandelte Flächen).

Beteiligte Stichproben

- **Einzelbeobachtung**
- **Ein-Stichproben-Tests**
- **Zwei-Stichproben-Tests**
- **Gepaarte Tests**
  wenn zwei Messungen am gleichen statistischen Individuum verglichen werden sollen (z.B. vorher – nachher Vergleiche).

Beteiligte Stichproben

- **Einzelbeobachtung**
- **Ein-Stichproben-Tests**
- **Zwei-Stichproben-Tests**
- **Gepaarte Tests**
- **Mehr-Stichproben-Tests**

  Überprüfen, ob mehrere Grundgesamtheiten gleich sind (z.B. nachweisen, dass sich verschiedene ethnische Gruppen in ihrem Sozialverhalten unterscheiden.)

Zu testende Größe

- **Mittelwert/Lage**
  z.B. verdienen Männer und Frauen im Schnitt gleich viel, wenn sie als Geographen arbeiten?

Zu testende Größe

- **Mittelwert/Lage**
- **Varianz/Streuung**
  z.B. Welches von zwei Verfahren mißt genauer?

Zu testende Größe

- **Mittelwert/Lage**
- **Varianz/Streuung**
- **Verteilung**
  z.B. sind die Daten wirklich normalverteilt?

Zu testende Größe

- **Mittelwert/Lage**
- **Varianz/Streuung**
- **Verteilung**
- **Unabhängigkeit**
  z.B. bekommen Raucher öfter Krebs?

Art der Alternative

- **“Größer”**: $H_0 : \mu \leq 7,5$ vs. $H_1 : \mu > 7,5$
- **“Kleiner”**: $H_0 : \mu \geq 7,5$ vs. $H_1 : \mu < 7,5$
- **“Ungleich”**: $H_0 : \mu = 7,5$ vs. $H_1 : \mu \neq 7,5$

Die Tests auf größer und kleiner heißen auch **einseitige Tests**, da von der Hypothese aus die Alternative nur in einer Richtung liegt. Tests bei denen die Alternative in beiden Richtungen von der Hypothese liegt heißen auch **zweiseitige Tests**.

Art der Voraussetzung

- **Normalverteilung**
  Voraussetzung: Die Zufallsvariable sind normalverteilt.
  Problem: Falsche Ergebnisse, wenn Ausreißer vorliegen.
  Betrachtet: Mittelwert, Varianz

Art der Voraussetzung

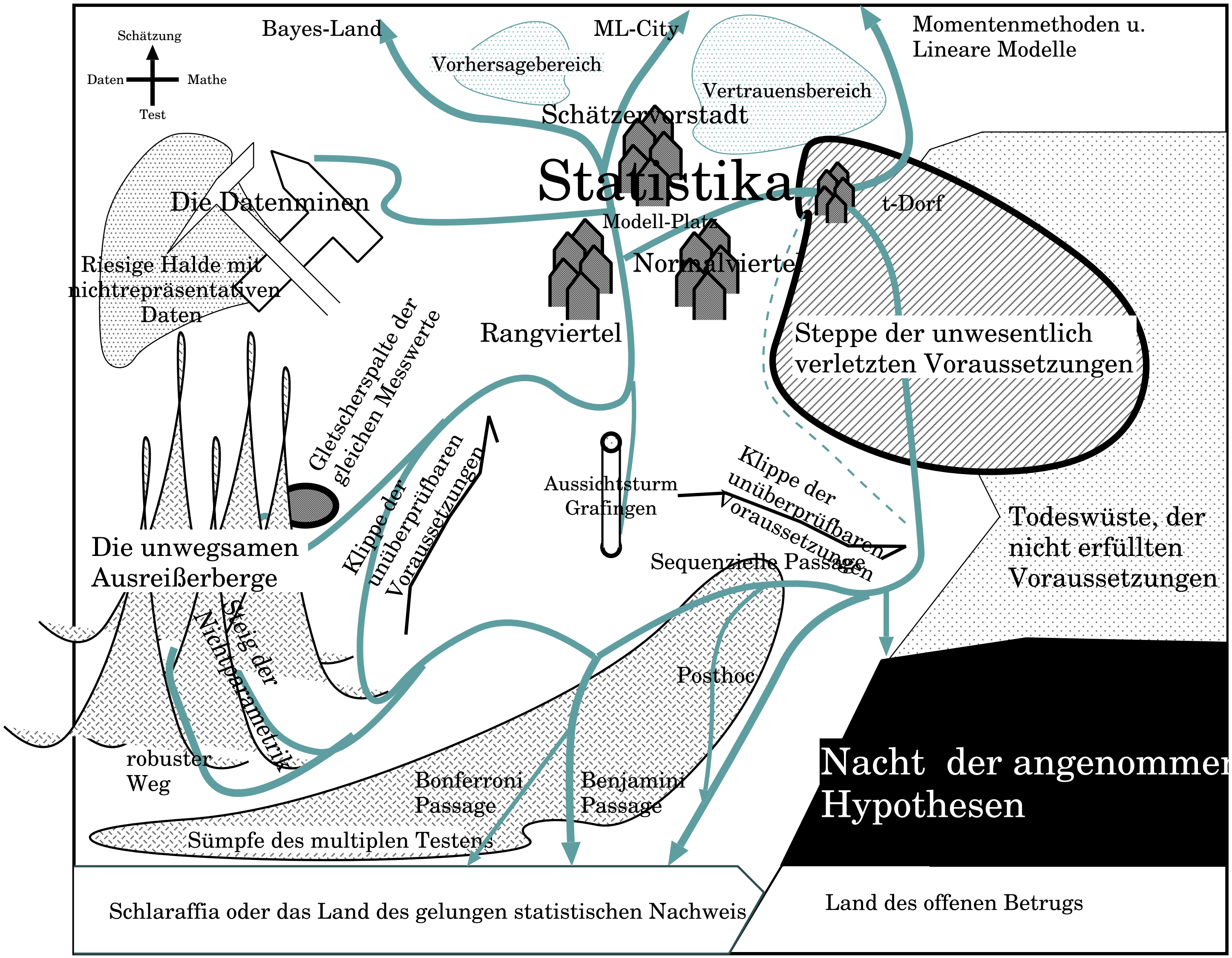
- **Normalverteilung**
- **Nichtparametrische Test/Rangtests**
  Voraussetzung: Die Zufallsvariable sind stetig verteilt.
  Problem: Falsche Ergebnisse, wenn zu viele Messwerte gleich sind.
  Betrachtet: Ränge, relative Verschiebung, $<$.

Art der Voraussetzung

- **Normalverteilung**
- **Nichtparametrische Test/Rangtests**
- **Robuste Tests**
  Voraussetzung: Normalverteilung (eventuell mit Ausreißern)
  Problem: Verfügbarkeit, Maximaler Anteil der Ausreißer muß angegeben werden.
  Betrachtet: Mittelwert, Varianz des “Hauptanteils der Daten”

Art der Voraussetzung

- **Normalverteilung**
- **Nichtparametrische Test/Rangtests**
- **Robuste Tests**
- Generalvoraussetzung: Unabhängigkeit / repräsentative Stichprobe



Schätzung
Daten
Mathe
Test
Bayes-Land
Vorhersagebereich
ML-City
Vertrauensbereich
Momentenmethoden u.
Lineare Modelle
Schätzervorstadt
Statistika
Die Datenminen
Modell-Platz
t-Dorf
Riesige Halde mit
nichtrepräsentativen
Daten
Normalviertel
Rangviertel
Steppe der unwesentlich
verletzten Voraussetzungen
Gletscherspalte der
gleichen Messwerte
Klippe der
unüberprüfbaren
Voraussetzungen
Aussichtsturm
Grafingen
Klippe der
unüberprüfbaren
Voraussetzungen
Todeswüste, der
nicht erfüllten
Voraussetzungen
Die unwegsamen
Ausreißerberge
Sequenzielle Passage
Steig der
Nichtparametrik
Posthoc
robuster
Weg
Bonferroni
Passage
Benjamini
Passage
Nacht der angenommen
Hypothesen
Sümpfe des multiplen Testens
Schlaraffia oder das Land des gelungen statistischen Nachweis
Land des offenen Betrugs

Voraussetzungen an die Varianz

Bei Zwei– und Mehrstichproben-Problemen mit Normalverteilungsvoraussetzung ist oft noch die Unterscheidung nach der Gleichheit der Varianz wichtig.

- **homoskedastisch**: Streuung in allen Teilgrundgesamtheiten gleich.
- **heteroskedastisch**: Streuungen nicht unbedingt gleich.

Anzahl der beteiligten Merkmale

- **univariat**: Es wird nur ein Merkmal betrachtet.
- **bivariat**: Es werden zwei Merkmale betrachet.
- **multivariat**: Es werden mehrere Merkmale betrachtet.

Ein-Stichproben-Tests

Verteilung

Shapiro-Wilk-Test

- ## Shapiro-Wilk-Test

  Situation: Test auf Normalverteilung

  $H_0 : X \sim N(\mu, \sigma^2)$

  $H_1 : X$ nicht normalverteilt

  Voraussetzungen: X_i i.i.d.

  Bemerkung:

Beispiel

```
> x <- rexp(20)
> shapiro.test(x)

        Shapiro-Wilk normality test


data:  x
W = 0.8316, p-value = 0.002658
```

Kolmogorov-Smirnov-Test

- **Kolmogorov-Smirnov-Test**

  Situation: Test auf spezielle Verteilung (stetig)

  $H_0: \ \forall x : F_X(x) = F_0(x)$

  $H_1 : \exists x : F_X(x) \neq F_0(x)$ oder $\exists x : F_X(x) > F_0(x)$ oder $\exists x : F_X(x) < F_0(x)$

  Voraussetzungen: X_i i.i.d. und die Werte sind nicht merklich gerundet.

  Bemerkung: Der Test gilt so nur, wenn die Parameter nicht geschätzt werden mußten. Eine kleinere Verteilungsfunktion gehört zu größeren Werten.

Ein-Stichproben-Tests

Lage

Gausstest

- **Gausstest**

  Situation: Test auf Mittelwert bei bekannter Varianz

  $H_0 : \mu = \mu_0$

  $H_1 : \mu \neq \mu_0$

  Voraussetzungen: $X_i \sim N(\mu, \sigma_0^2)$

  Bemerkung: Der Gauss-Test wird sehr selten auf reale Datensätze angewendet, da die Varianz fast nie bekannt ist. Er ist jedoch der wohl am leichtesten theoretisch zu verstehende Test und daher immer noch überall zu finden.

Einstichproben t-Test

- **Einstichproben t-Test**

  Situation: Test auf Mittelwert bei unbekannter Varianz

  $H_0 : \mu = \mu_0$

  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ oder $\mu > \mu_0$ oder $\mu < \mu_0$

  Voraussetzungen: $X_i \sim N(\mu, \sigma_0^2)$

  Bemerkung:

Binomial Test

- **Binomial Test**

  Situation: Test auf Erfolgswahrscheinlichkeit

  $H_0: \; p = p_0$

  $H_1: p \neq p_0$ oder $p > p_0$ oder $p < p_0$

  Voraussetzungen: $X \sim Bi(p, n)$

  Bemerkung:

Vorzeichentest

- ## Vorzeichentest

  Situation: Test auf bestimmten Median

  $H_0 : F_X(0.5) = m_0$

  $H_1 :\ F_X(0.5) \neq m_0$ oder $F_X(0.5) > m_0$ oder $F_X(0.5) < m_0$

  Voraussetzungen: X_i i.i.d.. Verteilung im Median stetig

  Bemerkung:

Ein-Stichproben-Tests

Streuung

χ^2-Test auf Varianz

χ^2-Test auf Varianz

Situation: Test auf gegebenen Varianz bei normalverteilten Daten.

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ oder $\sigma^2 > \sigma_0^2$ oder $\sigma^2 < \sigma_0^2$

Voraussetzungen: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

Bemerkung:

Zwei-Stichproben-Tests

Verteilung

- **Zwei Stichproben Kolmogorov-Smirnov-Test**

  Situation: Testet die Gleichheit der stetigen Verteilungen der Stichproben

  $H_0 : \forall x : F_X(x) = F_Y(x)$

  $H_1 : \exists x : F_X(x) \neq F_Y(x)$ oder $\exists x : F_X(x) > F_Y(x)$ oder $\exists x : F_X(x) < F_Y(x)$

  Voraussetzungen: X_i und Y_i sind i.i.d. und stetig

  Bemerkung: Ungenau bei Bindungen. Die kleinere Verteilungsfunktion gehört zu größeren Werten.

Zwei-Stichproben-Tests

Lage

Zwei-Stichproben-t-Test

- ## Zwei-Stichproben-t-Test

  Situation: Vergleich von Mittelwerten zweier Stichproben bei Normalverteilung und gleicher Varianz

  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$

  $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ oder $\mu_X > \mu_Y$ oder $\mu_X < \mu_Y$

  Voraussetzungen: $X_i \sim N(\mu_X, \sigma^2)$ und $Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$, i.i.d.

  Bemerkung: Die Normalverteilungsvoraussetzung ist relativ unkritisch, solange keine Ausreißer vorliegen und Verteilung ungefähr normal ist. Die Normalverteilungsvoraussetzung kann mit dem Shapiro-Wilk Test und die Varianzgleichheit mit dem F-Test überprüft werden.

Welchs t–Test

- **Welchs t–Test**

  Situation: Vergleich von Mittelwerten zweier Stichproben bei Normalverteilung und verschiedener Varianz

  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$

  $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ oder $\mu_X > \mu_Y$ oder $\mu_X < \mu_Y$

  Voraussetzungen: $X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, i.i.d.

  Bemerkung: Die Normalverteilungsvoraussetzung ist relativ unkritisch, solange keine Ausreißer vorliegen und Verteilung ungefähr normal ist.

Wilcoxen–Rang–Summen–Test

- **Wilcoxen–Rang–Summen–Test**

  Situation: Vergleich der Lage zweier Stichproben mit stetiger Verteilung

  $H_0 : \forall x : F_X(x) = F_Y(x)$

  $H_1 : \forall x : F_X(x) = F_Y(x - c)$ mit $c \neq 0$ oder $c > 0$ oder $c < 0$

  Voraussetzungen: X_i und Y_i sind alle stochastisch unabhängig und die F_X und F_Y sind stetig.

  Bemerkung: Es handelt sich um ein rangbasiertes Verfahren. Der Test wird allgemein verwendet um die Lagegleichheit bei nicht normalverteilten Stichproben zu Testen, da die Voraussetzung der Verteilungsgleichheit für die Korrektheit des Tests unkritisch ist. Der Test wird ungenau, wenn gleiche Werte (Bindungen) vorkommen.

Zwei-Stichproben-Tests

Streuung

F-Test

- **F-Test**

  Situation: Test auf Gleichheit der Varianz bei Normalverteilung

  $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

  $H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ oder $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ oder $\sigma_X^2 < \sigma_Y^2$

  Voraussetzungen: $X_i \sim N(\mu, \sigma_X^2)$, $Y_i \sim N(\mu, \sigma_Y^2)$

  Bemerkung:

Fligner-Test

Für den nichtparametrischen Streuungsvergleich eignet sich auch der Fligner-Test, der als Mehrstichprobentest besprochen wird.

Gepaarte-Tests

Lage

gepaarter t-Test

- **gepaarter t-Test**

  Situation:

  $H_0 : E[X - Y] = 0$

  $H_1 : E[X - Y] \neq 0$ oder $E[X - Y] > 0$ oder $E[X_i - Y_i] < 0$

  Voraussetzungen: $X_i - Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

  Bemerkung: Dieses normalverteilungsbasierte Verfahren hat Probleme mit Ausreißern in der Differenz.

Wilcoxen-Vorzeichen-Rang-Test

- ## Wilcoxen-Vorzeichen-Rang-Test

  Situation: Testet auf eine mittlere Änderung von 0 zwischen beiden Beobachtungen am gleichen Individuum.

  H_0 : Die Verteilung von $X_i - Y_i$ ist symmetrisch um 0.

  H_1 : Die Verteilung von $X_i - Y_i$ ist symmetrisch um ein $c \neq 0$ oder $c < 0$ oder $c > 0$

  Voraussetzungen: Die Verteilung ist für alle Paare gleich.

  Bemerkung: Dieses rangbasierte Verfahren hat Probleme mit Bindungen in den Differenzen.

Tests auf Abhängigkeit

stetige Größen

Pearson–Korrelationstest

- ## Pearson–Korrelationstest

  Situation: Test auf Pearson-Korrelation gleich 0

  $H_0 : \mathrm{cor}(X, Y) = 0$

  $H_1 : \mathrm{cor}(X, Y) \neq 0$ oder $\mathrm{cor}(X, Y) > 0$ oder $\mathrm{cor}(X, Y) < 0$

  Voraussetzungen: $(X, Y) \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$

  Bemerkung:

Spearman–Korrelationstest

Spearman–Korrelationstest

Situation: Test auf Spearman-Rang-Korrelation

$H_0 : \mathrm{cor}(X, Y) = 0$

$H_1 : \mathrm{cor}(X, Y) \neq 0$ oder $\mathrm{cor}(X, Y) > 0$ oder $\mathrm{cor}(X, Y) < 0$

Voraussetzungen: Unabhängigkeit, wenige Bindungen

Bemerkung:

Tests auf Abhängigkeit

diskrete Größen

Test auf Unabhängigkeit in Kontingenztaf

- **χ^2-Test auf Unabhängigkeit in Kontingenztafeln**

  Situation: Test auf Unabhängigkeit von kategoriellen Merkmalen

  $H_0 : X$ und Y sind stochastisch unabhängig

  $H_1 : X$ und Y sind stochastisch abhängig

  Voraussetzungen: Die einzelnen Individuen sind stochastisch unabhängig

  Bemerkung: Der p-Wert des Tests wird nur approximativ berechnet. Die Approximation ist schlecht, wenn in einzelnen Zellen der Datentafel unter der Unabhängigkeitsannahme weniger als 3-5 Werte zu erwarten sind.

Fishers exakter Test

- **Fishers exakter Test**

  Situation: Test auf Unabhängigkeit von 2x2 Kontingenztafeln und dichtomer Merkmale

  H_0 : Die Merkmale sind stochastisch Unabhängig

  H_1 : Die Merkmale sind stochastisch abhängig

  Voraussetzungen: Die Merkmale an verschiedenen statistischen Individuen sind stochastische unabhängig.

  Bemerkung: Im Gegensatz zum χ^2-Test auf Unabhängigkeit wird hier keine Approximation verwendet. Der Test ist also immer dann vorzuziehen, wenn er in der Situation anwendbar ist.

Mehrstichproben Tests

Lage

Einfache Varianzanalyse

- ## Einfache Varianzanalyse

  Situation: Test auf Gleichheit der Erwartungswerte mehrerer normalverteilter Stichproben.

  $H_0 : \forall g, g' : \mu_g = \mu_{g'}$

  $H_1 : \exists g, g' : \mu_{g_i} \neq \mu_j$

  Voraussetzungen: $X_i \sim N(\mu_{g_i})$ wobei g_i die Gruppenzugehörigkeit des Individuums i beschreibt.

  Bemerkung: Die Varianzanalyse setzt die Gleichheit der Varianz und Normalverteilung voraus.

Kruskal–Wallis–Test

- ## Kruskal–Wallis–Test

  Situation: Test auf Gleichheit der Lage mehrerer stetig verteilter Stichproben.

  H_0 : Alle Gruppen haben die gleiche Verteilung

  H_1 : Die Verteilungen der Gruppen sind gegeneinander verschoben.

  Voraussetzungen: Die X_i unabhängig sein.

  Bemerkung: Der Kruskal Wallis Test ist ein Rangbasiertes Verfahrung und ist damit potentiell anfällig gegegen zu viele gleiche Messwerte.

Mehrstichproben Tests

Streuung

Bartlett–Test

- **Bartlett–Test**

  Situation: Testet auf gleiche Varianz in mehrere Stichproben

  H_0 : Die Varianzen der Stichproben sind gleich

  H_1 : Die Varianzen der Stichproben sind nicht alle gleich.

  Voraussetzungen: $X_i|G_i \sim N(\mu_{G_i}, \sigma_{G_i})$ stochastisch unabhängig.

  Bemerkung: Dieser Test wird oft eingesetzt, um eine Voraussetzung der Varianzanalyse zu überprüfen.

Fligner–Test

Fligner–Test

Situation: Testet auf gleiche Streuung in mehreren Stichproben

H_0 : Die Streuungen der Stichproben sind gleich.

H_1 : Die Streuungen der Stichproben sind unterschiedlich.

Voraussetzungen: Die Beobachtungen sind alle stochastisch Unabhängig, stetig verteilt und die Verteilung hängt nur von der Gruppe ab.

Bemerkung: