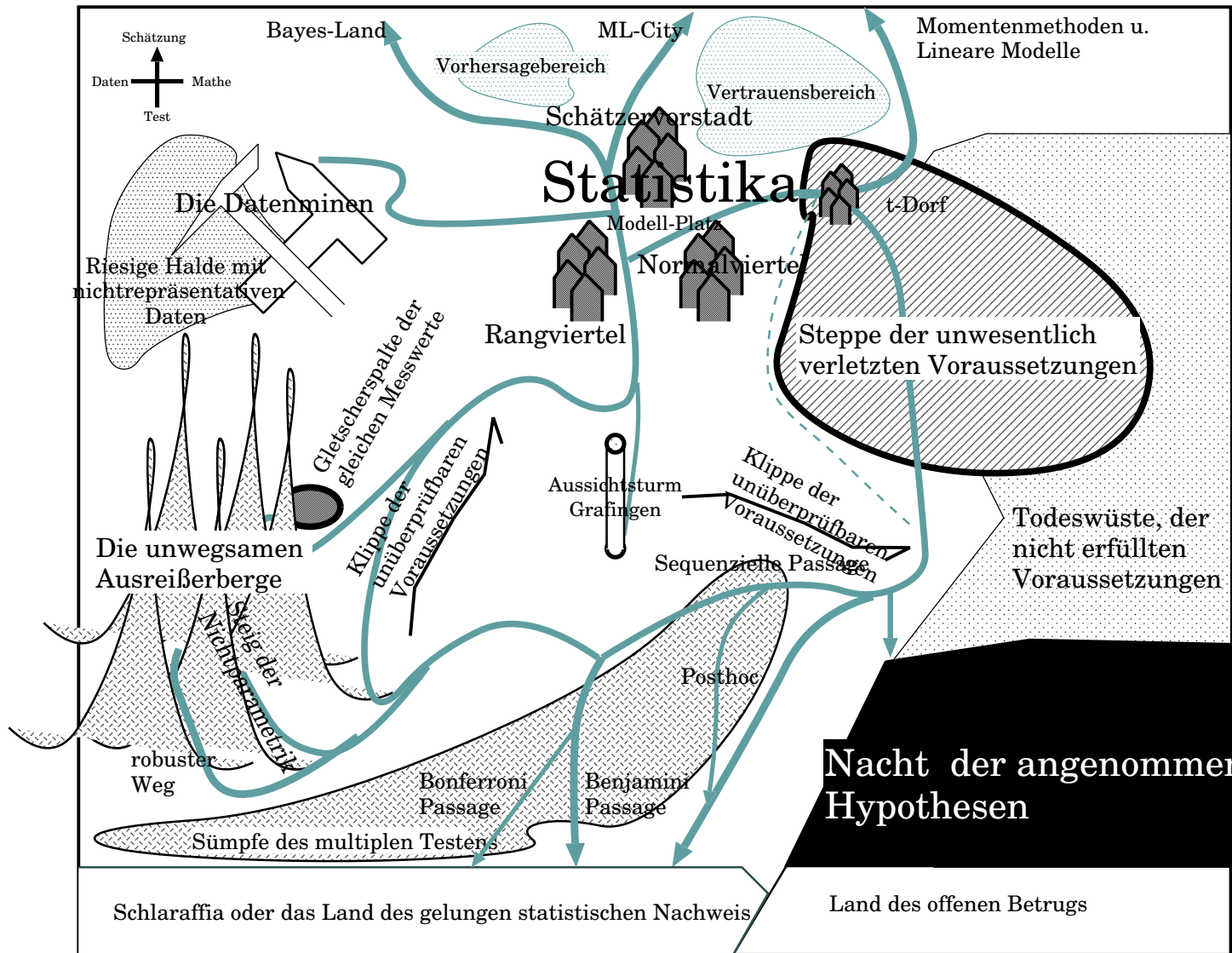


Statistik

Vorlesung 6 (Tests II)

K.Gerald van den Boogaart

<http://www.math-inf.uni-greifswald.de/statistik>



Der Test im Computer

```
> EinfacherGauss.test <- function(x, mean = 0, var = 1) {  
+   parameter <- c(mean = mean, sd = sqrt(var))  
+   statistic <- c(T = x)  
+   structure(list(data.name = deparse(substitute(x)), method =  
+     alternative = "greater", parameter = parameter, statisti  
+     p.value = 1 - pnorm(statistic, mean = parameter["mean"],  
+       sd = parameter["sd"])), class = "htest")  
+ }  
> EinfacherGauss.test(9.46, mean = 7.5, var = 1)
```

Ein Stichproben Gauss-Test

data: 9.46

T = 9.46, mean = 7.5, sd = 1.0, p-value = 0.025

alternative hypothesis: greater

Ein Test hat

- Namen
(hier: einfacher einseitiger Gauss-Test)

Ein Test hat

- Namen
- Anwendungssituation
Überprüfen ob der wahre Erwartungswert einen festen Wert (hier 7,5) übersteigt, wenn eine normalverteilte Messung mit bekannter Varianz σ^2 vorliegt.

Ein Test hat

- Namen
- Anwendungssituation
- Hypothese und Alternative
 $H_0 : \mu = 7,5$ vs. $H_1 : \mu > 7,5$

Ein Test hat

- Namen
- Anwendungssituation
- Hypothese und Alternative
- Voraussetzungen

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Ein Test hat

- Namen
- Anwendungssituation
- Hypothese und Alternative
- Voraussetzungen
- Ein Entscheidungsverfahren
Meist im Computer implementiert.

Die Testsituationen

Die Testsituationen werden nach mehrere Kriterien unterteilt:

- Anzahl der beteiligten Stichproben
- Zu testende Größe
- Art der Alternative
- Art der Voraussetzungen
- Anzahl der beteiligten Merkmale

Beteiligte Stichproben

- Einzelbeobachtung
z.B. ein einzelner Messwert, wie im Beispiel

Beteiligte Stichproben

- Einzelbeobachtung
- Ein-Stichproben-Tests
Es werden Eigenschaften einer Grundgesamtheit untersucht, z.B. wenn das Labor mehrere Messungen gemacht hat.

Beteiligte Stichproben

- Einzelbeobachtung
- Ein-Stichproben-Tests
- Zwei-Stichproben-Tests
wenn zwei Grundgesamtheiten verglichen werden sollen (z.B. behandelte und unbehandelte Flächen).

Beteiligte Stichproben

- Einzelbeobachtung
- Ein-Stichproben-Tests
- Zwei-Stichproben-Tests
- Gepaarte Tests
wenn zwei Messungen am gleichen statistischen Individuum verglichen werden sollen (z.B. vorher – nachher Vergleiche).

Beteiligte Stichproben

- Einzelbeobachtung
- Ein-Stichproben-Tests
- Zwei-Stichproben-Tests
- Gepaarte Tests
- Mehr-Stichproben-Tests
Überprüfen, ob mehrere Grundgesamtheiten gleich sind (z.B. nachweisen, dass sich verschiedene ethnische Gruppen in ihrem Sozialverhalten unterscheiden.)

Zu testende Größe

- Mittelwert/Lage

z.B. verdienen Männer und Frauen im Schnitt gleich viel, wenn sie als Geographen arbeiten?

Zu testende Größe

- Mittelwert/Lage
- Varianz/Streuung
z.B. Welches von zwei Verfahren mißt genauer?

Zu testende Größe

- Mittelwert/Lage
- Varianz/Streuung
- Verteilung
z.B. sind die Daten wirklich normalverteilt?

Zu testende Größe

- Mittelwert/Lage
- Varianz/Streuung
- Verteilung
- Unabhängigkeit
z.B. bekommen Raucher öfter Krebs?

Art der Alternative

- “Größer”: $H_0 : \mu \leq 7,5$ vs. $H_1 : \mu > 7,5$
- “Kleiner”: $H_0 : \mu \geq 7,5$ vs. $H_1 : \mu < 7,5$
- “Ungleich”: $H_0 : \mu = 7,5$ vs. $H_1 : \mu \neq 7,5$

Die Tests auf größer und kleiner heißen auch einseitige Tests, da von der Hypothese aus die Alternative nur in einer Richtung liegt. Tests bei denen die Alternative in beiden Richtungen von der Hypothese liegt heißen auch zweiseitige Tests.

Art der Voraussetzung

- Normalverteilung
Voraussetzung: Die Zufallsvariable sind normalverteilt.
Problem: Falsche Ergebnisse, wenn Ausreißer vorliegen.
Betrachtet: Mittelwert, Varianz

Art der Voraussetzung

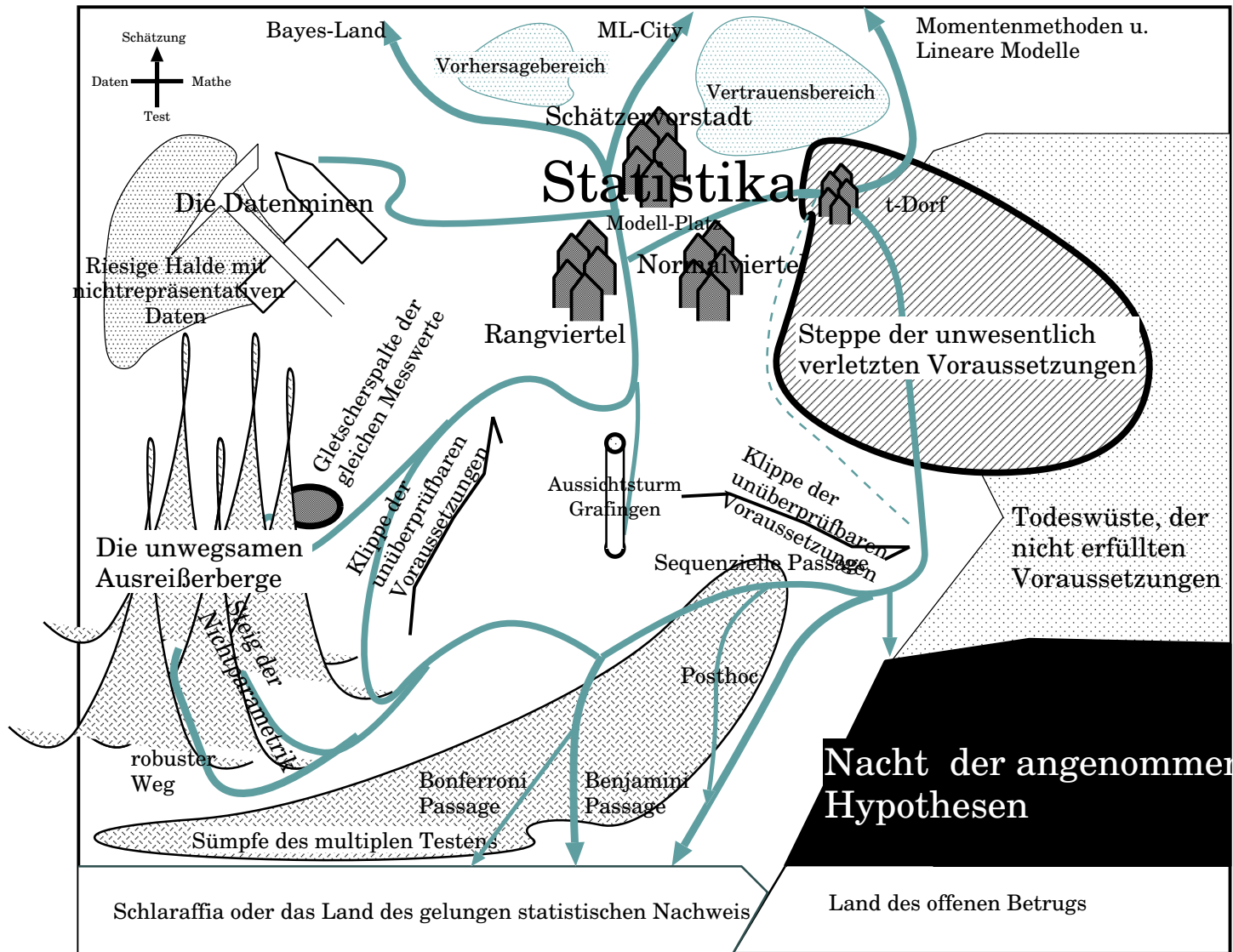
- Normalverteilung
- Nichtparametrische Test/Rangtests
Voraussetzung: Die Zufallsvariable sind stetig verteilt.
Problem: Falsche Ergebnisse, wenn zu viele Messwerte gleich sind.
Betrachtet: Ränge, relative Verschiebung, $<$.

Art der Voraussetzung

- Normalverteilung
- Nichtparametrische Test/Rangtests
- Robuste Tests
Voraussetzung: Normalverteilung (eventuell mit Ausreißern)
Problem: Verfügbarkeit, Maximaler Anteil der Ausreißer muß angegeben werden.
Betrachtet: Mittelwert, Varianz des "Hauptanteils der Daten"

Art der Voraussetzung

- Normalverteilung
- Nichtparametrische Test/Rangtests
- Robuste Tests
- Generalvoraussetzung: Unabhängigkeit / repräsentative Stichprobe



Voraussetzungen an die Varianz

Bei Zwei- und Mehrstichproben-Problemen mit Normalverteilungsvoraussetzung ist oft noch die Unterscheidung nach der Gleichheit der Varianz wichtig.

- homoskedastisch: Streuung in allen Teilgrundgesamtheiten gleich.
- heteroskedastisch: Streuungen nicht unbedingt gleich.

Anzahl der beteiligten Merkmale

- univariat: Es wird nur ein Merkmal betrachtet.
- bivariat: Es werden zwei Merkmale betrachtet.
- multivariat: Es werden mehrere Merkmale betrachtet.

Ein-Stichproben-Tests

Verteilung

irgendeine Normalverteilung \Rightarrow Shapiro-Wilk-Test

eine bestimmte stetige Verteilung \Rightarrow

(Ein-Stichproben)-KS-Test

Shapiro-Wilk-Test

- Shapiro-Wilk-Test

Situation: Test auf Normalverteilung

$$H_0 : X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$H_1 : X$ nicht normalverteilt

Voraussetzungen: X_i i.i.d.

Bemerkung:

Beispiel

```
> x <- rexp(20)
```

```
> shapiro.test(x)
```

Shapiro-Wilk normality test

data: x

W = 0.8619, p-value = 0.008481

Kolmogorov-Smirnov-Test

● Kolmogorov-Smirnov-Test

Situation: Test auf spezielle Verteilung (stetig)

$$H_0 : \forall x : F_X(x) = F_0(x)$$

$$H_1 : \exists x : F_X(x) \neq F_0(x) \text{ oder } \exists x : F_X(x) > F_0(x) \\ \text{oder } \exists x : F_X(x) < F_0(x)$$

Voraussetzungen: X_i i.i.d. und die Werte sind nicht merklich gerundet.

Bemerkung: Der Test gilt so nur, wenn die Parameter nicht geschätzt werden mußten. Eine kleinere Verteilungsfunktion gehört zu größeren Werten.

Ein-Stichproben-Tests

Lage

normalverteilt, Varianz bekannt \Rightarrow Gauss-Test

normalverteilt, Varianz unbekannt \Rightarrow spezieller t-Test

nicht normal \Rightarrow Vorzeichen-test

dichotom \Rightarrow Binomial Test

diskret \Rightarrow ... spezieller χ^2 -Test (später)

Gausstest

● Gausstest

Situation: Test auf Mittelwert bei bekannter Varianz

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Voraussetzungen: $X_i \sim N(\mu, \sigma_0^2)$

Bemerkung: Der Gauss-Test wird sehr selten auf reale Datensätze angewendet, da die Varianz fast nie bekannt ist. Er ist jedoch der wohl am leichtesten theoretisch zu verstehende Test und daher immer noch überall zu finden.

Einstichproben t-Test

- **Einstichproben t-Test**

Situation: Test auf Mittelwert bei unbekannter Varianz

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \text{ oder } \mu > \mu_0 \text{ oder } \mu < \mu_0$$

Voraussetzungen: $X_i \sim N(\mu, \sigma_0^2)$

Bemerkung:

Binomial Test

- **Binomial Test**

Situation: Test auf Erfolgswahrscheinlichkeit

$$H_0 : p = p_0$$

$$H_1 : p \neq p_0 \text{ oder } p > p_0 \text{ oder } p < p_0$$

Voraussetzungen: $X \sim Bi(p, n)$

Bemerkung:

Vorzeichentest

• Vorzeichentest

Situation: Test auf bestimmten Median

$$H_0 : F_X(0.5) = m_0$$

$$H_1 : F_X(0.5) \neq m_0 \text{ oder } F_X(0.5) > m_0 \text{ oder } F_X(0.5) < m_0$$

Voraussetzungen: X_i i.i.d.. Verteilung im Median stetig

Bemerkung:

Ein-Stichproben-Tests

Streuung

normalverteilt $\Rightarrow \chi^2$ -Test (Chi-Quadrat-Test)

nicht normal $\Rightarrow \dots$ problematisch

χ^2 -Test auf Varianz

• χ^2 -Test auf Varianz

Situation: Test auf gegebenen Varianz bei normalverteilten Daten.

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \text{ oder } \sigma^2 > \sigma_0^2 \text{ oder } \sigma^2 < \sigma_0^2$$

Voraussetzungen: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

Bemerkung:

Zwei-Stichproben-Tests

Verteilung

stetig \Rightarrow zwei Stichproben KS-Test

diskret \Rightarrow ... Tafeltests (später)

Zwei Stichproben Kolmogorov-Smirnov-Test

- **Zwei Stichproben
Kolmogorov-Smirnov-Test**

Situation: Testet die Gleichheit der stetigen Verteilungen der Stichproben

$$H_0 : \forall x : F_X(x) = F_Y(x)$$

$$H_1 : \exists x : F_X(x) \neq F_Y(x) \text{ oder } \exists x : F_X(x) > F_Y(x) \\ \text{oder } \exists x : F_X(x) < F_Y(x)$$

Voraussetzungen: X_i und Y_i sind i.i.d. und stetig

Bemerkung: Ungenau bei Bindungen. Die kleinere Verteilungsfunktion gehört zu größeren Werten.

Zwei-Stichproben-Tests

Lage

normalverteilt \Rightarrow gepaarter t-test

nicht normal aber stetig \Rightarrow Wilcoxon-Vorzeichen-Rang Test

Zwei-Stichproben-t-Test

• Zwei-Stichproben-t-Test

Situation: Vergleich von Mittelwerten zweier Stichproben bei Normalverteilung und gleicher Varianz

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$

$$H_1 : \mu_X \neq \mu_Y \text{ oder } \mu_X > \mu_Y \text{ oder } \mu_X < \mu_Y$$

Voraussetzungen: $X_i \sim N(\mu_X, \sigma^2)$ und $Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$, i.i.d.

Bemerkung: Die Normalverteilungsvoraussetzung ist relativ unkritisch, solange keine Ausreißer vorliegen und Verteilung ungefähr normal ist. Die Normalverteilungsvoraussetzung kann mit dem Shapiro-Wilk Test und die Varianzgleichheit mit dem F-Test überprüft werden.

Welchs t-Test

• Welchs t-Test

Situation: Vergleich von Mittelwerten zweier Stichproben bei Normalverteilung und verschiedener Varianz

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$

$$H_1 : \mu_X \neq \mu_Y \text{ oder } \mu_X > \mu_Y \text{ oder } \mu_X < \mu_Y$$

Voraussetzungen: $X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, i.i.d.

Bemerkung: Die Normalverteilungsvoraussetzung ist relativ unkritisch, solange keine Ausreißer vorliegen und Verteilung ungefähr normal ist.

Wilcoxon–Rang–Summen–Test

● Wilcoxon–Rang–Summen–Test

Situation: Vergleich der Lage zweier Stichproben mit stetiger Verteilung

$$H_0 : \forall x : F_X(x) = F_Y(x)$$

$H_1 : \forall x : F_X(x) = F_Y(x - c)$ mit $c \neq 0$ oder $c > 0$ oder $c < 0$

Voraussetzungen: X_i und Y_i sind alle stochastisch unabhängig und die F_X und F_Y sind stetig.

Bemerkung: Es handelt sich um ein rangbasiertes Verfahren. Der Test wird allgemein verwendet um die Lagegleichheit bei nicht normalverteilten Stichproben zu Testen, da die Voraussetzung der Verteilungsgleichheit für die Korrektheit des Tests unkritisch ist. Der Test wird ungenau, wenn gleiche Werte (Bindungen) vorkommen.

Zwei-Stichproben-Tests

Streuung

normalverteilt \Rightarrow F-test

nicht normal aber stetig \Rightarrow Fligner Test

F-Test

- **F-Test**

Situation: Test auf Gleichheit der Varianz bei Normalverteilung

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$$

$$H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2 \text{ oder } \sigma_X^2 > \sigma_Y^2 \text{ oder } \sigma_X^2 < \sigma_Y^2$$

Voraussetzungen: $X_i \sim N(\mu, \sigma_X^2)$, $Y_i \sim N(\mu, \sigma_Y^2)$

Bemerkung:

Fligner-Test

Für den nichtparametrischen Streuungsvergleich eignet sich auch der Fligner-Test, der als Mehrstichprobentest besprochen wird.

Gepaarte-Tests

Lage

normalverteilt \Rightarrow gepaarter t-test

nicht normal aber stetig \Rightarrow Wilcoxon-Vorzeichen-Rang Test

gepaarter t-Test

- gepaarter t-Test

Situation:

$$H_0 : E[X - Y] = 0$$

$$H_1 : E[X - Y] \neq 0 \text{ oder } E[X - Y] > 0 \text{ oder } E[X_i - Y_i] < 0$$

Voraussetzungen: $X_i - Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

Bemerkung: Dieses normalverteilungsbasierte Verfahren hat Probleme mit Ausreißern in der Differenz.

Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test

• Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test

Situation: Testet auf eine mittlere Änderung von 0 zwischen beiden Beobachtungen am gleichen Individuum.

H_0 : Die Verteilung von $X_i - Y_i$ ist symmetrisch um 0.

H_1 : Die Verteilung von $X_i - Y_i$ ist symmetrisch um ein $c \neq 0$ oder $c < 0$ oder $c > 0$

Voraussetzungen: Die Verteilung ist für alle Paare gleich.

Bemerkung: Dieses rangbasierte Verfahren hat Probleme mit Bindungen in den Differenzen.

Tests auf Abhängigkeit

stetige Größen

⇒ Korrelationstests

Pearson–Korrelationstest

● Pearson–Korrelationstest

Situation: Test auf Pearson-Korrelation gleich 0

$$H_0 : \text{cor}(X, Y) = 0$$

$$H_1 : \text{cor}(X, Y) \neq 0 \text{ oder } \text{cor}(X, Y) > 0 \text{ oder } \text{cor}(X, Y) < 0$$

Voraussetzungen: $(X, Y) \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$

Bemerkung:

Spearman–Korrelationstest

• Spearman–Korrelationstest

Situation: Test auf Spearman-Rang-Korrelation

$$H_0 : \text{cor}(X, Y) = 0$$

$$H_1 : \text{cor}(X, Y) \neq 0 \text{ oder } \text{cor}(X, Y) > 0 \text{ oder } \text{cor}(X, Y) < 0$$

Voraussetzungen: Unabhängigkeit, wenige Bindungen

Bemerkung:

Tests auf Abhängigkeit

diskrete Größen

dichotom \Rightarrow Fishers exakter Test

viele \Rightarrow (spezieller) χ^2 -Test

sonst \Rightarrow ... problematisch

χ^2 -Test auf Unabhängigkeit in Kontingenztafeln

- χ^2 -Test auf Unabhängigkeit in Kontingenztafeln

Situation: Test auf Unabhängigkeit von kategoriellen Merkmalen

H_0 : X und Y sind stochastisch unabhängig

H_1 : X und Y sind stochastisch abhängig

Voraussetzungen: Die einzelnen Individuen sind stochastisch unabhängig

Bemerkung: Der p -Wert des Tests wird nur approximativ berechnet. Die Approximation ist schlecht, wenn in einzelnen Zellen der Datentafel unter der Unabhängigkeitsannahme weniger als 3-5 Werte zu erwarten sind.

Fishers exakter Test

● Fishers exakter Test

Situation: Test auf Unabhängigkeit von 2x2 Kontingenztafeln und dichotomer Merkmale

H_0 : Die Merkmale sind stochastisch Unabhängig

H_1 : Die Merkmale sind stochastisch abhängig

Voraussetzungen: Die Merkmale an verschiedenen statistischen Individuen sind stochastische unabhängig.

Bemerkung: Im Gegensatz zum χ^2 -Test auf Unabhängigkeit wird hier keine Approximation verwendet. Der Test ist also immer dann vorzuziehen, wenn er in der Situation anwendbar ist.

Tests auf Abhängigkeit

Stetige Größe Abhängig von diskreter
Größe

dichotom \Rightarrow Zwei-Stichproben-Test

mehrere Kategorien \Rightarrow Mehr-Stichproben-Test

Mehrstichproben Tests

Lage

Normalverteilt, homoskedastisch \Rightarrow Varianzanalyse
immerhin stetig \Rightarrow ... Kruskal-Wallis-Test

Einfache Varianzanalyse

● Einfache Varianzanalyse

Situation: Test auf Gleichheit der Erwartungswerte mehrerer normalverteilter Stichproben.

$$H_0 : \forall g, g' : \mu_g = \mu_{g'}$$

$$H_1 : \exists g, g' : \mu_{g_i} \neq \mu_j$$

Voraussetzungen: $X_i \sim N(\mu_{g_i})$ wobei g_i die Gruppenzugehörigkeit des Individuums i beschreibt.

Bemerkung: Die Varianzanalyse setzt die Gleichheit der Varianz und Normalverteilung voraus.

Kruskal–Wallis–Test

● Kruskal–Wallis–Test

Situation: Test auf Gleichheit der Lage mehrerer stetig verteilter Stichproben.

H_0 : Alle Gruppen haben die gleiche Verteilung

H_1 : Die Verteilungen der Gruppen sind gegeneinander verschoben.

Voraussetzungen: Die X_i unabhängig sein.

Bemerkung: Der Kruskal Wallis Test ist ein Rangbasiertes Verfahren und ist damit potentiell anfällig gegenüber zu viele gleiche Messwerte.

Mehrstichproben Tests

Streuung

normalverteilt \Rightarrow Bartlett-Test

immerhin stetig \Rightarrow Fligner-Test

Bartlett–Test

● Bartlett–Test

Situation: Testet auf gleiche Varianz in mehrere Stichproben

H_0 : Die Varianzen der Stichproben sind gleich

H_1 : Die Varianzen der Stichproben sind nicht alle gleich.

Voraussetzungen: $X_i|G_i \sim N(\mu_{G_i}, \sigma_{G_i})$
stochastisch unabhängig.

Bemerkung: Dieser Test wird oft eingesetzt, um eine Voraussetzung der Varianzanalyse zu überprüfen.

Fligner–Test

● Fligner–Test

Situation: Testet auf gleiche Streuung in mehreren Stichproben

H_0 : Die Streuungen der Stichproben sind gleich.

H_1 : Die Streuungen der Stichproben sind unterschiedlich.

Voraussetzungen: Die Beobachtungen sind alle stochastisch Unabhängig, stetig verteilt und die Verteilung hängt nur von der Gruppe ab.

Bemerkung:

Übersicht

Stetige Skala

		Voraussetzung	Stichprobensituation			
			Ein-	Zwei-	Mehr-	gepaart/bivariat
interessierende Parameter	Lage	homo-skedastisch	Ein-Stichproben t-test	Zwei-Stichproben t-test	Varianzanalyse (ANOVA)	gepaarter t-test
		hetero-skedastisch		Welchs t-test	???	
	stetig		Vorzeichentest	Wilcoxon Rang-Summen Test	Kruskal-Wallis Test	Wilcoxon Vorzeichen-Rang Test
		normal	χ^2 -Test auf Streuung	F-Test	Bartlett-Test	χ^2 -Test auf Streuung auf Differenzen
	Streuung	stetig	???	???	Fligner-Test	???
		normal?	Shapiro-Wilk-Test	Shapiro-Wilk-Test auf beiden Stichp	Shapiro-Wilk-Test auf jeder Stichp	Shapiro-Wilk-Test auf Differenzen
Verteilung	identisch?		Z.-S.-K.-S.-Test	???		
	speziell?	E.-S.-K.-S.-Test χ^2 -Test auf Vert		E.-S.-K.-S.-Test auf jeder Stichp	E.-S.-K.-S.-Test auf Differenzen	
Abhängigkeit	normal	Lineare Modelle				Pearson-Korrelations-Test
	speziell/ stetig	Generalisierte Lineare Modelle				Spearman-Korrelations-Test

Zwischenschritte

