Titel des Beitrages : **Kartierung von Strain auf Basis geodätischer und geotechnischer Beobachtungen mittels Geostatistik**

Verfasser: Karl Gerald van den Boogaart, Michael Drobniewski

Kontaktadresse (n) :

TU Bergakademie Freiberg
Institut für Markscheidewesen und Geodäsie
09596 Freiberg
Tel.: 03731−39/−−−−
Fax: 03731−39/−−−−
E−mail: boogaart@grad.tu−freiberg.de

TU Bergakademie Freiberg
Institut für Markscheidewesen und Geodäsie
09596 Freiberg
Tel.: 03731−39/3591
Fax: 03731−39/3601
E−mail: drobniew@mabb.tu−freiberg.de

Kartierung von Strain auf Basis geodätischer und geotechnischer Beobachtungen mittels Geostatistik

Karl Gerald van den Boogaart, Institut für Geologie
Michael Drobniewski, Institut für Markscheidewesen und Geodäsie

TU Bergakademie Freiberg

ZUSAMMENFASSUNG:

Die Geostatistik bietet eine leistungsfähige Möglichkeit zur kartenmäßigen Darstellung kleiner Verformungen. Dabei können viele verschiedene Informationen, Messungen und konzeptionelle Modelle in die Interpolation aufgenommen werden. Da Kriging immer auch die Schätzgenauigkeit liefert, kann auch die Frage beantwortet werden, wie genau die Karte ist und ob und wo die Daten überhaupt ausreichen, um eine Verformung oberhalb der Bestimmungsgrenze zu kartieren. Daher kann mit dieser Methode auch festgestellt werden, inwieweit die vorhandenen Messungen für eine Kartierung des Strains überhaupt ausreichen.

1. Einführung

1 1.1 Datengrundlage

Ziel dieser Arbeit ist es, die geringe innere Verformung eines Teils der festen Erde oder eines geotechnischen Bauwerks möglichst gut zu kartieren. Dazu muß für jeden Punkt des Raumes, für den der Strain interessiert, ein Schätzwert berechnet werden können, dessen quadratisches Mittel vom wahren Wert möglichst wenig abweichen sollte. Die allgemein magere Datenlage insbesondere für 3D–Strain–Berechnungen zwingt zu einer Einbeziehung sämtlicher verfügbaren Informationsquellen. Das sind geodätische und geotechnische Beobachtungen einerseits und geologische und geomechanische Vorkenntnisse andererseits. Im Einzelnen werden folgenden Datenquellen betrachtet:

- Verschiebungsinformationen aus der Beobachtung geodätischer Netze in zwei (oder mehr) Epochen.
- geodätische Einzelbeobachtungen (z.B. Alignement)
- geotechnische Beobachtungen (z.B. Extensometer und Inklinometer)

Außerdem sollen folgende Informationsquellen genutzt werden:

- Geologische Störungen bilden Diskontinuitäten im Verschiebungsfeld, die bei der Kartierung des Strains unbedingt berücksichtigt werden müssen.
- Modellhaft bekannte Verformungen, wie etwa bergbauliche Senkungströge oder betriebszustandsabhängige reversible Verformungen, bilden nutzbare Vorabinformationen.

2
3

1.2 Verformungsbeschreibung

Die Verformung, die durch ein Verschiebungsfeld $\ae_\mu = \ae_\mu(\bar{x}) = x_\mu(\bar{x}_n, u, t_1) - x_\mu(\bar{x}_n, u, t_0)$ gegeben ist, wird im allgemeinen durch den Straintensor $\mathring{a}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\ae_{\mu\nu} + \ae_{\nu\mu})$ und seine Komponenten, den Dilatationstensor $\mathring{a}^{(D)}_{\mu\nu} = \frac{1}{3}\ddot{a}_{\mu\nu}\sum_\lambda \mathring{a}_{\lambda\lambda}$ und den Deviator $\mathring{a}^{(0)}_{\mu\nu} = \mathring{a}_{\mu\nu} - \mathring{a}^{(D)}$), oder seine sonstige Funktionale wie Volumendilatation $\Theta = \sum_\lambda \varepsilon_{\lambda\lambda} \approx \mathbf{div}\,\zeta$, Hauptdilatationsflächen und ε_I, ε_{II}, ε_{III} Hauptdilationen dargestellt. Hierbei bezeichnet $\mathbf{x}_\mu(\mathbf{x}_\nu, t_i)$ die Lage des Körperpunktes $\mathbf{x}$ zur Epoche t_i.

Außerdem sind mitunter datumsabhängige Größen, wie der Rotationstensor $D_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\zeta_{\mu\nu} - \zeta_{\nu\mu})$, Scherungen oder das Verschiebungsfeld ζ_μ selbst interessant. Da wir nur kleine Verschiebungen und Verformungen betrachten, können wir uns hier auf die Beschreibungsweise der linearisierten Kontinuumsmechanik beschränken [8]. Der Straintensor $\varepsilon_{\mu\nu}$ und viele seiner wichtigen Funktionale $\varepsilon^{(0)}_{\mu\nu}$, $\varepsilon^{(D)}_{\mu\nu}$, Θ sind lineare Funktionale des Verschiebungsfeldes.

Auch die Beobachtungen lassen sich bei geringer Deformation zu Beobachtungen linearen Funktionale des Verschiebungsfeldes linearisieren. Geodätische Beobachtungen in zwei Epochen werden als Beobachtung einer Verschiebung in Hoch– und Rechtswert in trivialer Weise zu einem linearen Funktional des Verschiebungsfeldes.

$$\zeta_{\vec{x}_i} = \mathbf{x}_{beobachtet}(\bar{\mathbf{x}}_i, t_0) + \varepsilon - \mathbf{x}_{beobachtet}(\bar{\mathbf{x}}_i, t_0) - \varepsilon_0 \tag{1}$$

Die Kovarianzmatrix der Beobachtungsfehler ergibt sich aus der Summe der in der Ausgleichung berechneten Kovarianzen der Beobachtungsfehler in den beiden Epochen, da beide Messungen als unabhängig angesehen werden können. Der Einfluß eines Datumseffektes, der zu einer Drehung und Verschiebung der Punktkoordinaten in der zweiten Epoche führen kann wird später besprochen.

5

1.4 Vektorielle Geostatistik in Kurzform

Kriging ist eine lineare statistische Methode zur Vorhersage von Werten einer zufälligen Funktion $Z(\mathbf{x})$ des Ortes $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$ an unbeobachteten Stellen aus gemessenen Werten derselben Funktion. Dazu muß für den ortsabhängigen Erwartungswert der Funktion ein Trendmodell der Form:

$$E[Z(\mathbf{x})] - \sum_{l-1}^{p} \alpha_i f_i(\mathbf{x}) \tag{2}$$

mit unbekannten Parametern α_1 und deterministisch bekannten Funktionen $f_l(\mathbf{x})$ bekannt sein. Weiterhin benötigt man eine Funktion $c(\mathbf{h})$, für die:

$$\mathbf{var}\left(\sum_{i-1}^{N} w_i Z(\mathbf{x}_i)\right) = \sum_{i,j} w_i c(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) w'_j \tag{3}$$

gilt und zwar für jede Wahl von N und w_i, so daß

$$\sum_{i-1}^{N} w_i f_l(\mathbf{x}_i) = 0, \forall l \tag{4}$$

Diese Funktion heißt generalisierte Kovarianzfunktion ([5]), die unter gewissen allgemeinen Stationaritätsanahmen (intrinsische Hypothese) existiert. Sie kann meist aus den vorliegenden Daten geschätzt werden [7], [5], [4]. Dazu werden die Parameter $\theta_1, \ldots, \theta_q$ einer geeigneten Modellfunktion $c_\theta(\mathbf{h})$ so angepaßt, daß $c(\mathbf{h}) = c_\theta(\mathbf{h})$ zu den beobachteten Momenten paßt. Aus theoretischen Gründen muß $\mathbf{var}\left(\sum_{i-1}^{N} w_i Z(\mathbf{x}_i)\right) \geq 0$ sein, was die Wahl der möglichen Modellfunktionen deutlich einschränkt. Außerdem sollten die Kovarianzen $q_{ij} := \mathbf{cov}(e_i, e_j)$ der Meßfehler e_i der Beobachtungen $z(\mathbf{x}_i) = Z(\mathbf{x}_j) + e_i$ bekannt sein.

Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so kann man die lineare erwartungstreue Vorhersage mit kleinster Vorhersagevarianz $\mathbf{var}(\hat{Z}(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x}))$ für den Funktionswert an einer Stelle $\mathbf{x}$ folgendermaßen berechnen:

$$\hat{z}(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} z(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ z(\mathbf{x}_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_1)+q_{11} & \cdots & c(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_n)+q_{1n} & f_1(\mathbf{x}_1) & \cdots & f_n(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_1)+q_{n1} & \cdots & c(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_n)+q_{nn} & f_1(\mathbf{x}_n) & \cdots & f_n(\mathbf{x}_n) \\ f_1(\mathbf{x}_1)' & \cdots & f_1(\mathbf{x}_n)' & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(\mathbf{x}_1)' & \cdots & f_n(\mathbf{x}_n)' & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\mathbf{x},\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ c(\mathbf{x},\mathbf{x}_n) \\ f_1(\mathbf{x})' \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x})' \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Diese Methode läßt sich direkt auf vektorwertige Zufallsfunktionen $Z(\mathbf{x})\in\mathbf{R}^d$ wie das Verschiebungsfeld $Z(\mathbf{x})=\zeta(\mathbf{x})$ übertragen. Die Formeln liest man dann als Formeln von Blockmatrizen, wobei alle beteiligten Funktionen vektor− oder matrixwertig werden: $c(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\in\mathbf{R}^{d\times d}$, $f_l(\mathbf{x})\in\mathbf{R}^d$, $\alpha_l\in\mathbf{R}^d$, $w_i\in\mathbf{R}^{d\times d}$. Matrixungleichungen sind im Sinne der Löwner−Matrix−Halbordnung zu lesen: $\mathbf{A}>\mathbf{B}\Leftrightarrow\mathbf{v}'\mathbf{A}\mathbf{v}>\mathbf{v}'\mathbf{B}\mathbf{v},\forall\mathbf{v}\in\mathbf{R}^\mathbf{d}$. Ausführliche Darstellungen zu intrinsischen Zufallsfunktionen und verallgemeinerten Kovarianzfunktionen finden sich beispielsweise in [5].

Bei einer besonderen Form des Kriging, dem sogenannte Gradientenkriging, werden Messungen der Ableitungen als zusätzliche Daten verwendet. Das ist möglich, da die generalisierte Kovarianz der Ableitungen mit den Daten sich als Ableitungen der Funktion $c(\mathbf{h})$ berechnen lassen. Die Ideen des Gradientenkriging werden auf unser Problem übertragen, indem das Kriginggleichungssystem so verändert wird, daß nicht nur Gradienten, sondern auch andere indirekte Messungen des Verschiebungsfeldes zur Schätzung verwendet werden. Solche indirekten Messungen sind z.B. die erwähnten geotechnischen Beobachtungen. Ein zweites Mal werden die Ideen des Gradientenkriging verwendet, um statt der gemessenen Verschiebungen ihre Ableitung, nämlich den Straintensor und seine linearen Funktionale, zu schätzen.

2. Die Vorgehensweise im Überblick

1 2.1 Das Verschiebungsfeld als Zufallsfunktion

Um das Interpolationsproblem mittels Geostatistik fassen und bearbeiten zu können, modellieren wir das Verschiebungsfeld $\zeta_\mu(x)$ als vektorwertige Zufallsfunktion. Ein Teil der Modellfunktionen $f_l(x), l=1,\ldots,p_1$ ergibt sich dabei direkt aus der unbeobachtbaren Gesamtrotation / −translation des Gebietes (Datumsunbekannte) und der Möglichkeit eines maßstäblich das Kartierungsgebiet überragende Großdeformationsfeldes.

$$\begin{aligned} &f_1(\mathbf{x})=(1\ \ 0\ \ 0)^T && f_2(\mathbf{x})=(0\ \ 1\ \ 0)^T && f_3(\mathbf{x})=(0\ \ 0\ \ 1)^T \\ &f_4(\mathbf{x})=(x_1\ \ 0\ \ 0)^T && f_5(\mathbf{x})=(x_2\ \ 0\ \ 0)^T && f_6(\mathbf{x})=(x_3\ \ 0\ \ 0)^T \\ &f_7(\mathbf{x})=(0\ \ x_1\ \ 0)^T && f_8(\mathbf{x})=(0\ \ x_2\ \ 0)^T && f_9(\mathbf{x})=(0\ \ x_3\ \ 0)^T \\ &f_{10}(\mathbf{x})=(0\ \ 0\ \ x_1)^T && f_{11}(\mathbf{x})=(0\ \ 0\ \ x_2)^T && f_{12}(\mathbf{x})=(0\ \ 0\ \ x_3)^T \\ &p_1=12 \end{aligned} \qquad (6)$$

Die Komponenten eines mitteleren Verschiebungsvektors sind dann die unbekannten Parameter α_1, α_2, α_3. Die Gesamtrotation und −verzerrung wird durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_9 \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \end{pmatrix} = \sigma\bar{\Sigma} \tag{7}$$

ausgedrückt, die sich aus der großräumigen mittleren Verzerrung $\bar{\Sigma}$ und der relativen Rotation σ der Bezugsrahmen der beiden geodätischen Netze berechnet.
Will man eine Gesamtdeformation des Gebietes ausschließen, müssen beide Netze zunächst mit einer Helmerttransformation möglichst gut zur Deckung gebracht werden, damit sich die durch die Datumsunbekannte ergebenden Rotationsunsicherheiten als linearisiertes Modell darstellen lassen. Die globalen Verzerrungsfunktionen $f_4,\ldots,f_{12}$ werden dann durch drei linearisierte Rotationsanteile ersetzt:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_4(\mathbf{x}) &= f_5(\mathbf{x}) - f_7(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix} \\ \tilde{f}_5(\mathbf{x}) &= f_6(\mathbf{x}) - f_{10}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_3 & 0 & -x_1 \end{pmatrix} \\ \tilde{f}_6(\mathbf{x}) &= f_9(\mathbf{x}) - f_{11}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \end{pmatrix} \\ p_1 &= 5 \end{aligned} \tag{8}$$

Die infinitesimale Rotationsmatrix σ ergibt sich dann zu

$$\begin{pmatrix} 0 & \tilde{\alpha}_4 & \tilde{\alpha}_5 \\ -\tilde{\alpha}_4 & 0 & \tilde{\alpha}_6 \\ -\tilde{\alpha}_5 & -\tilde{\alpha}_6 & 0 \end{pmatrix} \approx \sigma \tag{9}$$

Weitere Modellfunktionen $f_l(\mathbf{x}), l = p_1+1,\ldots,p$ können zur Darstellung der geologischen und markscheiderischen Zusatzinformationen verwendet werden. Näher wird das in Kapitel 3 dargestellt.

2 2.2 Wahl der Kovarianzfunktion

Theoretische Überlegungen schränken den Bereich sinnvoller Modellfunktionen $c_\theta(\mathbf{h})$ für die verallgemeinerte Kovarianzfunktion $c(\mathbf{h})$ erheblich ein. Von den bekannten Modellen ist aus verschiedenen Gründen eine Maternsche Modellfunktion [9] am ehesten geeignet. Die Modellparameter können mit der in [4] eingeführten allgemeinen Methode, zur Schätzung von Variogrammen in der Gegenwart von Trend unter Einbeziehung aller Daten geschätzt werden.

Wenn Strain vorliegt, ist das Verschiebungsfeld differenzierbar und damit ist $c(\mathbf{h})$ zweimal differenzierbar in 0, da ein Zufallsfeld nur halb so oft differenzierbar ist wie seine Kovarianzfunktion [5].
Da das Verschiebungsfeld an Störungen möglicherweise unstetig ist, liegt an Störungen kein Strain vor und müssen deswegen gesondert behandelt werden. Da sich das äußere Kraftfeld und damit auch die Verformung an Störungen bedeutend ändern kann, schlagen wir vor, die Kovarianzfunktion $c(\mathbf{x},\mathbf{y})$ für Punkte auf verschiedenen durch Störungen getrennten Blöcken auf 0 zu setzen. Das Zusammenspiel dieser Setzung mit allgemeinen, generalisierten Kovarianzfunktionen ist allerdings noch nicht geklärt und daher mit Vorsicht zu verwenden. Im Falle einer gewöhnlichen Kovarianzfunktion, wie sie von uns konkret eingesetzt wurde, ist das allerdings ein gerechtfertigtes Vorgehen. Ideen zur Erstellung von Kovarianzfunktionsmodellen an Störungen, die Blöcke nicht vollständig trennen, finden sich in [4].

Das Erstellen matrixwertiger Kovarianzmodellfunktionen ist ein schwieriges Unterfangen. Zur Vereinfachung betrachten wir die Verschiebungen in den drei Koordinatenrichtungen als unabhängig und kommen so zu einer Kovarianzfunktion vom Typ:

$$c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot c_1(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|) \tag{10}$$

mit einer gewöhnlichen reellwertigen Kovarianzfunktion $c_1(\mathbf{h})$. Diese Vereinfachung erlaubt die Verwendung von Standardmodellfunktionen der Geostatistik als $c_1(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)$. Da die Funktionen in 0 zwei mal differenzierbar sein müssen, bieten sich insbesondere das Gaußsche und das Maternsche Kovariogramm als Modellfunktionen an. Das Gaußsche Kovariogramm hat allerdings einige problematische Eigenschaften [9], die zu unsinnigen Vorhersagen führen können, wie wir bei Proberechnungen auch beobachtete haben. Daher haben wir in Rechenbeispielen eine Maternsche Modellfunktion Funktion verwendet:

$$c_{\sigma^2,r}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sigma^2}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} \left(\frac{2\nu^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{r} \right)^{\nu} \mathrm{K}_{\nu}\left(\frac{2\nu^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{r} \right) \tag{11}$$

Die Vereinfachung entspricht der Annahme der gemeinsamen Isotropie der Meßwerte und des Raumes, wie sie in [3] definiert wurde, und ist für Verformungsprozesse nicht unbedingt sehr realistisch, da Abhängigkeiten, wie Querkontraktionen, auftreten können. Besser geeignet wäre also die an gleicher Stelle definierte allgemeinere Annahme der Isotropie des Prozesses, die allerdings zu deutlich komplizierteren Kovarianzmodellen führt. Damit wäre es dann auch theoretisch möglich spezielle Differentialgleichungen einzuhalten, beispielsweise die Volumenerhaltung $\Theta = 0$. (Vgl. [1])

3 2.3 Beobachtungen werden als lineare Funktionale ins Kriginggleichungssystem aufgenommen

Geodätisch beobachtete Punktlagedifferenzen werden als direkte Beobachtungen des Verschiebungsfeldes an Einzelpunkten in die Krigingvorhersage aufgenommen. Die übrigen indirekten Beobachtungen sind in erster Näherung Beobachtungen linearer Funktionale des Verschiebungsfeldes und können mit einer neuen Technik, die dem Gradientenkriging ähnelt, als Beobachtungen in die Krigingvorhersage mit aufgenommen werden. Damit läßt sich eine Krigingvorhersage $\hat{\zeta}(\mathbf{x})$ des Verschiebungsfeldes $\zeta(\mathbf{x})$ aus allen zur Verfügung stehenden Daten ermitteln.

Die zentrale Idee dabei ist, daß man in Kriginggleichungssystemen an jeder Stelle, an der ein Ort steht, auch ein lineares Funktional stehen kann. Trendfunktionen und generalisierte Kovarianzfunktionen können nicht nur an Meßstellen, sondern auch mit linearen Funktionalen ausgewertet werden. Funktionale L ordnen gewöhnlichen Funktionen Zahlen, Vektoren oder Matrizen zu. Einfache Beispiele für lineare Funktionale sind:

- Die Auswertung $e_{\mathbf{x}} f = f(\mathbf{x})$, die einer Funktion ihren Wert an der Stelle $\mathbf{x}$ zuordnet.
- Die Ableitung $\nabla_{\mathbf{x}}$, die einer Funktion ihren Gradienten $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ an der Stelle $\mathbf{x}$ zuordnet.
- Der Mittelwert

$$\mathbf{mean}_A f = \frac{\int_A f(x)\mathrm{dx}}{\int_A \mathrm{dx}}$$

von f in einem bestimmten Gebiet.

- Die Differenz $\Delta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})$, der Funktionswerte an zwei Stellen.

Im gewöhnlichen Kriging wird sozusagen nur die Auswertung $e_{\mathbf{x}}$ verwendet. Bei der Verwendung von Ableitungen als Daten spricht man von Gradientenkriging und bei der Verwendung von Mittelwerten als Vorhersageziel von Blockkriging. Das ungewöhnliche Funktional $\Delta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ erinnert eher an die Funktionale, die hier verwendet werden.

Definieren wir nun als Notation für lineare Funktionale L

$$f(L) := Lf \tag{12}$$

Das Ergebnis der Auswertung einer Funktion f mit einem Funktional L soll also einfach die Auswertung des Funktionals mit der Funktion f sein. Für Funktionen zweier Unbekannten definieren wir:

$$c(L,M) := L_x M_y c(\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{13}$$

Mit diesen Definitionen gelten alle Gleichungen von Kapitel 1.4 weiter, wenn die Orte $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}_i$ durch lineare Funktionale ersetzt werden. Die einzige Bedingung ist, daß alle Varianzen endlich bleiben. Es ist also möglich, die beste lineare unverzerrte Vorhersage für lineare Funktionale von ζ (z.B. der Straintensor) auf Grund beliebiger, beobachteter, linearer Funktionale (z.B. Extensometermessungen) durchzuführen.

4 2.4 Beobachtungen als Funktionale

Wie sich die Verformungsbeschreibungen als lineare Funktionale des Verschiebungsfeldes schreiben lassen, wurde bereits in Kapitel 1.2 dargestellt. Wenn die Verschiebungen so klein sind, daß sich Effekte höherer Ordnung vernachlässigen lassen, können die angegebenen Beobachtungen in der folgenden Weise als lineare Funktionale des Verschiebungsfeldes geschrieben werden:

- Die geodätische Beobachtung der Lagedifferenzen eines Punktes in zwei Epochen ist eine direkte Beobachtung der Verschiebung $e_{\mathbf{x}}\zeta$ eines Punktes, der in der ersten Epoche die Lage $\mathbf{x}$ hatte.
- Eine Alignementmessung der Änderung der Entfernung eines Punktes $\mathbf{x}_a$ zur Gerade zwischen den Punkten $\mathbf{x}_b$ und $\mathbf{x}_c$, läßt sich als

$$A_{\mathbf{x}_a,\mathbf{x}_b,\mathbf{x}_c}\zeta \approx \mathbf{v}^T\left(\zeta(\mathbf{x}_a) - \frac{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_b\|}{\|\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_b\|}\zeta(x_b) - \frac{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c\|}{\|\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_b\|}\zeta(x_c)\right) \tag{14}$$

  linearisieren. Dabei bezeichnet $\mathbf{v}$ einen Einheitsvektor senkrecht zur Geraden und $\mathbf{x}_0$ den Lotfußpunkt des Lotes von $\mathbf{x}_a$ auf die Gerade.
- Eine Extensometermessung zwischen den Punkten $\mathbf{x}_a$ und $\mathbf{x}_b$ läßt sich als

$$E_{\mathbf{x}_a,\mathbf{x}_b}\zeta \approx \frac{\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a}{\|\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a\|}\zeta(x_b) - \zeta(x_a) \tag{15}$$

linearisieren.

- Eine Inklinometermessung, der Neigung einer Strecke zwischen den Punkten $\mathbf{x}_a$ und $\mathbf{x}_b$ in Richtung $\mathbf{v}$ läßt sich als

$$I_{\mathbf{x}_a,\mathbf{x}_b,\mathbf{v}}\zeta \approx \frac{\mathbf{v}_a}{\left\|\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a\right\|}\left(\zeta(x_b) - \zeta(x_a)\right) \tag{16}$$

linearisieren.

5 2.5 Vorhersagefunktionale

Der Straintensor und seine linearen Funktionale sind lineare Funktionale des Verschiebungsfeldes. Sie können also mit den angegeben Formeln und sowohl als Daten als auch als vorherzusagende Größen in der angegeben Weise in das Kriginggleichungssystem aufgenommen werden. Dabei ist es gleichbedeutend, ob man sie in der hier angegebenen Weise aufnimmt oder ob man einfach auf die Krigingvorhersage des Verschiebungsfeldes die entsprechenden Funktionale anwendet. Man erhält in beiden Fällen das gleiche Ergebnis:

$$L_{\mathbf{x}}Z(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} z(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ z(\mathbf{x}_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_1)+q_{11} & \cdots & c(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_n)+q_{1n} & f_1(\mathbf{x}_1) & \cdots & f_p(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_1)+q_{n1} & \cdots & c(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_n)+q_{nn} & f_1(\mathbf{x}_n) & \cdots & f_p(\mathbf{x}_n) \\ f_1(\mathbf{x}_1)' & \cdots & f_1(\mathbf{x}_n)' & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_p(\mathbf{x}_1)' & \cdots & f_p(\mathbf{x}_n)' & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{\mathbf{x}}c(\mathbf{x},\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{x}}c(\mathbf{x},\mathbf{x}_n) \\ L_{\mathbf{x}}f_1(\mathbf{x})' \\ \vdots \\ L_{\mathbf{x}}f_p(\mathbf{x})' \end{pmatrix} \tag{17}$$

Nichtlineare Funktionale des Straintensors können mit diesem Verfahren geschätzt werden, indem man den Straintensor selbst mittels Geostatistik schätzt und aus dem geschätzten Tensor die entsprechenden Funktionale berechnet. Für dieses Verfahren können dann allerdings keine Optimalitätskriterien mehr angegeben werden.

6 2.6 Modifikation der Kovarianzen durch Meßfehler

Die Beobachtungen erfolgen mit Meßfehlern. Die Kovarianzmatrix $\mathbf{Q}$ der Verschiebungsbeobachtungen aus den geodätischen Netzen ergibt sich als Summe der beiden Kovarianzmatrizen aus den beiden Netzausgleichungen. Die Meßfehler verschiedener geotechnischer Beobachtungen sollten unkorreliert sein. Also ergeben sich die zugehörigen $q_{ii} = \mathbf{var}(e_i)$ aus den Meßgenauigkeiten des Verfahrens und die q_{ij} zu Null, falls $i \neq j$ und i und j nicht im gleichen geodätischen Netz sind.

$$\mathbf{Q}_e = \left(q_{ij}^e\right) = \begin{pmatrix} \sigma_I^2\mathbf{Q}_I + \sigma_{II}^2\mathbf{Q}_{II} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \sigma_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_m^2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Dabei bezeichnen $\mathbf{Q}_I$ und $\mathbf{Q}_{II}$ die Q−Matrizen der geodätischen Netze der ersten und zweiten Epoche. σ_I, σ_{II} sind die Standardabweichungen der Meßfehler in den beiden Epochen. σ_i bezeichnet die Standardabweichungen der Meßfehler der i−ten geotechnischen Beobachtung.

7 2.7 Modifikation der Kovarianzen durch ungenau gegebenen Meßorte

Einen zusätzlichen Fehler ergibt die ungenau bekannte Lage der geotechnischen Beobachtungen. Man mißt also das gesuchte Objekt nicht an der angegeben Stelle, sondern leicht versetzt. Dadurch wird der Meßfehler etwas größer. In die linearisierten Beobachtungen gehen gewichtete Summen von Werten des Verschiebungsfeldes ein. Die Fehlerstreuung eines um $\mathbf{h}$ verschobenen Funktionals beträgt:

$$\begin{aligned} & \mathbf{var}(L\zeta - L(\zeta(+\mathbf{h}))) = \\ = \; & c(L,L) + c(L+\mathbf{h}, L+\mathbf{h}) - c(L+\mathbf{h}, L) - c(L, L+\mathbf{h}) = \\ = \; & 2c(L,L) - c(L+\mathbf{h}, L) - c(L, L+\mathbf{h}) = \\ = \; & 2c(L,L) - \left(2c(L,L) + o\left(\|\mathbf{h}\|^2\right)\right) = \\ = \; & o\left(\|\mathbf{h}\|^2\right) \end{aligned} \tag{19}$$

Hier notiert $L+\mathbf{h}$ das um $\mathbf{h}$ verschobene Funktional L. Es gilt $c(L+\mathbf{h}, L) = c(L,L) + o\left(\|\mathbf{h}\|^2\right)$, da wegen der Differenzierbarkeit und Symmetrie von $c(\mathbf{x},\mathbf{y})$ gilt $\nabla_{\mathbf{x}} c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ in $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Der Einfluß der Trendfunktion kann in allen Fällen außer acht gelassen werden. Lageunsicherheiten können also vernachlässigt werden, wenn sie gemessen an der Reichweite r der Kovarianzfunktion klein sind. Größere Unsicherheiten können einfach als zusätzlicher, zufälliger Meßfehler in die Gleichung eingebaut werden.

3. Einbeziehen geologischer und geomechanischer Modellinformationen

1 3.1 Störungen

Ein Teil der Relativverschiebungen in der Erde wird nicht durch sich verformende Massen, sondern durch Gleiten an Störungen aufgenommen. Ein Teil dieser Störungsverformung erfolgt durch so kleinräumige Störungsnetzwerke, daß sie im betrachteten Maßstab als homogene Verformung angesehen werden kann. Aber oft liegen größere bekannte Störungen im Untersuchungsgebiet, die einen relevanten Anteil der Relativverschiebung aufnehmen. Dieses Störungsgleiten darf dann nicht als Verformung der umliegenden Massen in der Verformungskarte ausgewiesen werden. Das kann man erreichen, indem man eine Relativverschiebung der durch Störungen getrennten Blöcke als Trend erlaubt. Dabei sind, falls möglich, die durch die Störung vorgegebenen freien Bewegungsrichtungen zu beachten.

Außerdem kann es sinnvoll sein, wie in Kapitel 2.2 vorgeschlagen, die Kovarianz von Verschiebungen in verschiedene Blöcken 0 zu setzen.

2 3.2 Modellverformungen

Für betriebszustandabhängige Bewegungen von Staumauern und Maschinenhäusern oder für bergbaubedingte Senkungen lassen sich die erwarteten Verformungen oft in idealisierender Weise modellhaft als ein berechnetes Verschiebungsfeld darstellen. Die tatsächlichen Daten werden von diesem Verschiebungsfeld allerdings häufig abweichen. Es ist möglich, statt des Verschiebungsfeldes die Abweichungen $Z(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x}) - \zeta^{(0)}(\mathbf{x})$ selbst als Zufallsfeld zu modellieren. Ist $\zeta^{(0)}(\mathbf{x})$ nur qualitativ bekannt (z.B. weil der Abbaufaktor oder die Maximalauslenkung erst aus den Daten geschätzt werden kann), kann man es als Trendfunktion $f_{m+1}(\mathbf{x}) := \zeta^{(0)}(\mathbf{x})$ in das Kriginggleichungssystem mit aufnehmen. Ist diese Mittelwertsfunktion hingegen quantitativ bekannt, so wählt man den Krigingschätzer mit Trend

$$\hat{\zeta}(L) = \hat{Z}(L) + \zeta^{(0)}(L) \tag{20}$$

wobei für die Berechnung von $\hat{Z}(L)$ die Residuen $z(\mathbf{x}_i) = \zeta^{(x)} - \zeta^{(0)}(\mathbf{x})$ verwendet werden.

3 3.3 Inkompressible Verformung

In manchen Fällen geht man von einer inkompressiblen Verformung aus. Diese Einschränkung kann als Differentialgleichungsbedingung folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\nabla_\mu \zeta_\mu \equiv 0 \tag{21}$$

Nach [1] ergibt sich daraus eine Differentialgleichungsbedingung:

$$\nabla_x c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv 0 \tag{22}$$

Verwendet man ein c, das diese Bedingung erfüllt, und nur Trendfunktionen, die $\nabla f_i \equiv 0$ erfüllen, so ist die Krigingvorhersage ζ ein inkompressibles Verschiebungsfeld. So ein Kovarianzfunktionsmodell kann man erhalten, indem man eine gewöhnliches einfaches Modell $\tilde{c}_\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ als Kovarianzfunktion des zum Wirbelfeld ζ gehörenden Wirbelpotentials ansetzt und dann

$$c_\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{rot}_x\, \mathbf{rot}_y\, \tilde{c}_\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{23}$$

als generalisierte Kovarianzfunktion für ζ verwendet. Auf diese Weise kann man die zusätzliche Information der inkompressiblen Bewegung in die Vorhersage mit einbeziehen und so z.B. Informationen über das Verformungsverhalten in der dritten Dimension erhalten, ohne Längenänderungen in dieser Richtung messen zu müssen.

4. Zusammenfassung

Die Geostatistik bietet eine leistungsfähige Möglichkeit zur kartenmäßigen Darstellung kleiner Verformungen. Dabei können viele verschiedene Informationen, Messungen und konzeptionelle Modelle in die Interpolation aufgenommen werden. Da Kriging immer auch die Schätzgenauigkeit liefert, kann auch die Frage beantwortet werden, wie genau die Karte ist und ob und wo die Daten überhaupt ausreichen, um eine Verformung oberhalb der Bestimmungsgrenze zu kartieren. Daher kann mit dieser Methode auch festgestellt werden, inwieweit die vorhandenen Messungen für eine Kartierung des Strains überhaupt ausreichen.

1 Literatur

[1] Boogaart, K. G. v. d. (2001): Kriging for processes satisfying partial differential equations , *Proceedings of 2001 Annual Conference of the International Association for Mathematical Geology, September 6−12, 2001, Cancun, Mexico*

[2] Boogaart, K. G. v. d., A. Brenning (2001): Why is universal kriging better than IRFk−kriging: estimation of variograms in the presence of trend, *Proceedings of 2001 Annual Conference of the International Association for Mathematical Geology, September 6−12, 2001, Cancun, Mexico*

[3] Boogaart, K. G. v. d., H. Schaeben (2002): Kriging of regionalized directions, axes, and orientations I. Directions and axes, *Mathematical Geology*, to appear

[4] Brenning, A., K. G. v. d. Boogaart (2001): Geostatistics without stationary assumptions within GIS, *Proceedings of 2001 Annual Conference of the International Association for Mathematical Geology, September 6−12, 2001, Cancun, Mexico*

[5] Chilès, J.−P., Delfiner, P. (1999): *Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty*, Wiley, New York

[6] Cressie, N. (1993): *Statistics for spatial data* 2nd edition, Wiley, New York

[7] MATHERON, G. (1971): *The theory of regionalized variables and its applications*, Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau, No **5**, Published by École Nationale Superérieure des Mines de Paris

[8] SCHMUTZER, E. (1989): *Grundlagen der Theoretischen Physik, Teil I*, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim

[9] Stein, M.L. (1999): *Interpolation of Spatial Data*, Springer, New York