Statistik

Vorlesung 6 (Tests II)

K.Gerald van den Boogaart
http://www.stat.boogaart.de

Das Entscheidungsverfahren

Das Test (also das Entscheidungsverfahren)

$$T(X) = \begin{cases} 0, & \text{falls } S(X) < F_{P_0^S}(1-\alpha) \\ 1, & \text{falls } S(X) \geq F_{P_0^S}(1-\alpha) \end{cases}$$

besteht normalerweise aus:

- Einer Funktion S(X), genannt die Teststatistik (hier $S(X) = X$)
- und der Verteilung P_0^S der Teststatistik unter der Nullhypothese:
  (hier $P_0^S = N(\mu_0, \sigma_0^2)$)

Die Berechnung des p-Wertes

Das Entscheidungsverfahren besteht normalerweise aus:

- …und der resultierenden Entscheidungsregel

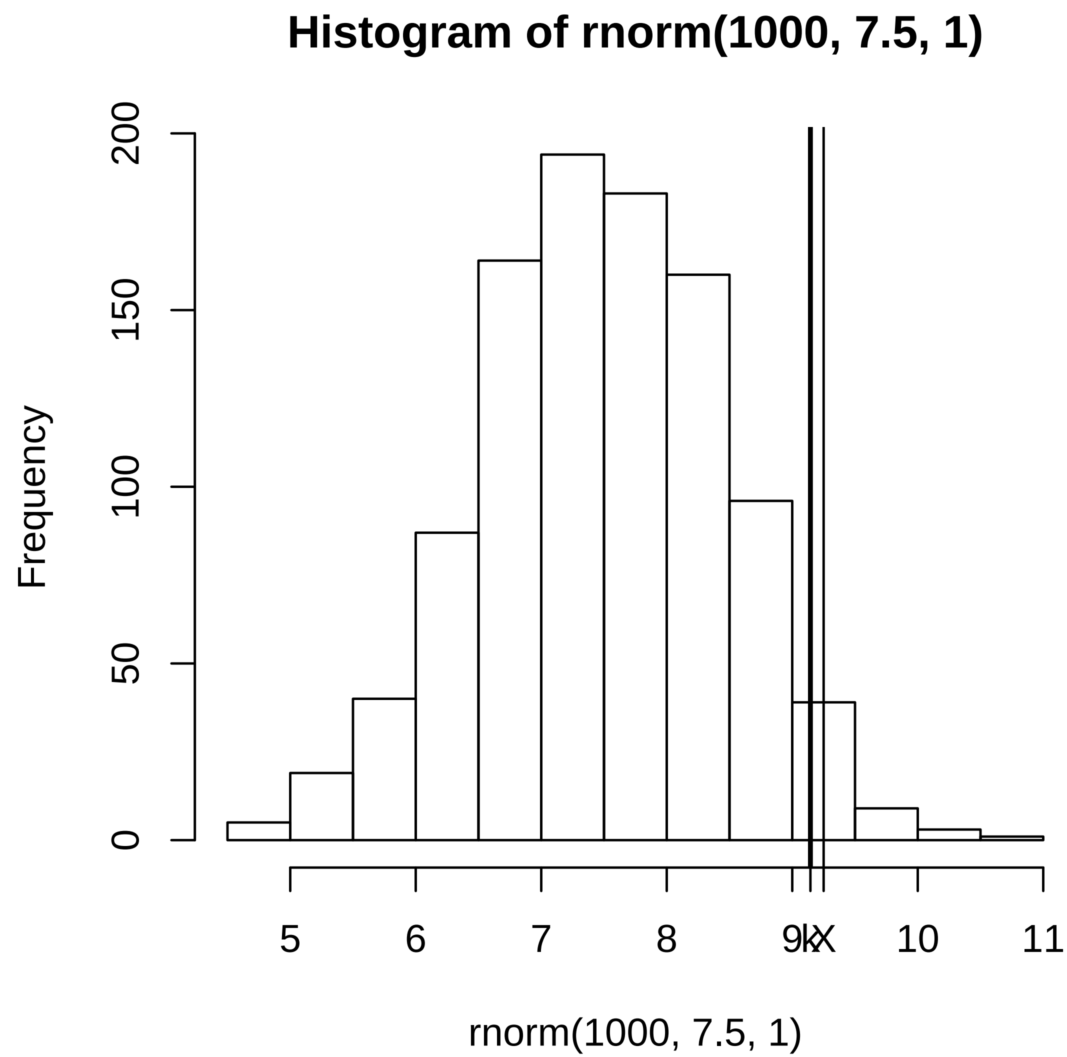
$$T(X) = \begin{cases} 0, & \text{falls } S(X) < F_{P_0^S}(1-\alpha) \\ 1, & \text{falls } S(X) \geq F_{P_0^S}(1-\alpha) \end{cases}$$

der p-Wert (kleinstes α-Niveau zu dem abgeleht wird) wird dann wie folgt berechnet:

$$p = 1 - F^{-1}(S(X))$$

da dann $S(X) = F(1-p)$ genau auf der Grenze liegt.

Kritischer Wert



$p =$Fläche oberhalb $S(X)$

Der Test ist im Computer implementiert

```
EinfacherGauss.test <- function(x,mean=0,var=1) {
  parameter <-c(mean=mean,sd=sqrt(var))
  statistic <- c(T=x)
  structure(list(
               data.name=deparse(substitute(x)),
               method="Ein Stichproben Gauss-Test",
               alternative="greater",
               parameter=parameter,
               statistic=statistic,
               p.value=1-pnorm(statistic,
                 mean=parameter["mean"],
                 sd=parameter["sd"])
               ),
            class="htest")
}
```

Der Test wird im Computer durchgeführt

```
...

> EinfacherGauss.test(9.46, mean = 7.5, var = 1)

        Ein Stichproben Gauss-Test

data:  9.46
T = 9.46, mean = 7.5, sd = 1.0, p-value = 0.025
alternative hypothesis: greater
```

Jeder im Computer implementierte Test gibt irgendwo einen p-Wert aus. Diesen gilt es zu finden.

Es gibt viele Tests.

Wie finde ich den richtigen?

Die Testsituationen

Die Testsituationen werden nach mehrere Kriterien unterteilt:

- **Anzahl der beteiligten Stichproben**
- **Zu testende Größe**
- **Art der Alternative**
- **Art der Voraussetzungen**
- **Anzahl der beteiligten Merkmale**

Beteiligte Stichproben

- **Einzelbeobachtung**
- **Ein-Stichproben-Tests**
- **Zwei-Stichproben-Tests**
- **Gepaarte Tests**
- **Mehr-Stichproben-Tests**
  Überprüfen, ob mehrere Grundgesamtheiten gleich sind (z.B. nachweisen, dass sich verschiedene ethnische Gruppen in ihrem Sozialverhalten unterscheiden.)

Zu testende Größe

- **Mittelwert/Lage**
- **Varianz/Streuung**
- **Verteilung**
- **Unabhängigkeit**
  z.B. bekommen Raucher öfter Krebs? d.h. ist Krebs vom Rauchen abhängig.

Art der Alternative

- **"Größer"**: $H_0 : \mu \leq 7,5$ vs. $H_1 : \mu > 7,5$
- **"Kleiner"**: $H_0 : \mu \geq 7,5$ vs. $H_1 : \mu < 7,5$
- **"Ungleich"**: $H_0 : \mu = 7,5$ vs. $H_1 : \mu \neq 7,5$

Die Tests auf größer und kleiner heißen auch **einseitige Tests**, da von der Hypothese aus die Alternative nur in einer Richtung liegt. Tests bei denen die Alternative in beiden Richtungen von der Hypothese liegt heißen auch **zweiseitige Tests**.

Art der Voraussetzung

- Generalvoraussetzung: Unabhängigkeit / repräsentative Stichprobe(n)
- **Normalverteilungsbasierte Tests**
- **Nichtparametrische Test/Rangtests**
- **Robuste Tests**
  Voraussetzung: Die Zufallsvariablen sind Normalverteilung, aber es dürfen falsche Werte/Ausreißer vorhanden sein
  Problem: Verfügbarkeit, Maximaler Anteil der falschen Werte muß angegeben werden.
  Betrachtet: Mittelwert, Varianz des “Hauptanteils der Daten”
  Info: Liegen von der Effizienz her zwischen den beiden anderen.

Voraussetzungen an die Varianz

Bei Zwei– und Mehrstichproben-Problemen mit Normalverteilungsvoraussetzung ist oft noch die Unterscheidung nach der Gleichheit der Varianz wichtig.

- **homoskedastisch**: Streuung in allen Teilgrundgesamtheiten gleich.
- **heteroskedastisch**: Streuungen nicht unbedingt gleich.

Anzahl der beteiligten Merkmale

- **univariat**: Es wird nur ein Merkmal betrachtet.
- **bivariat**: Es werden zwei Merkmale betrachet.
- **multivariat**: Es werden mehrere Merkmale betrachtet.

Ein-Stichproben-Tests

Verteilung

irgendeine Normalverteilung $\Rightarrow$ Shapiro-Wilk-Test
eine bestimmte stetige Verteilung $\Rightarrow$
(Ein-Stichproben)-KS-Test

Shapiro-Wilk-Test

- ## Shapiro-Wilk-Test

  Situation:

  Test auf Normalverteilung

  H_0 : X normalverteilt ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$)

  H_1 : X nicht normalverteilt

  Voraussetzungen:

  repräsentative Stichprobe
  nicht zu stark gerundet

  Bemerkung:

  d.h. es darf keine “falschen Bindungen” geben

  Befehl: `shapiro.test(X)`

Beispiel

```
> x <- rexp(20)
> shapiro.test(x)

        Shapiro-Wilk normality test


data:  x
W = 0.9069, p-value = 0.05563
```

Kolmogorov-Smirnov-Test

Kolmogorov-Smirnov-Test

Situation:

Test auf spezielle Verteilung (stetig)

H_0 : X hat die Verteilungsfunktion F_0: $F_X \equiv F_0$

H_1 : Die Verteilungsfunktion F_X ist ungleich F_0

Voraussetzungen:

repräsentative Stichprobe
nicht zu stark gerundet

Bemerkung:

d.h. es darf keine “falschen Bindungen” geben
Der Test nimmt zu oft an, wenn die Parameter aus den Daten geschätzt wurden.
Der Test lehnt zu oft ab, wenn die Parameter aus anderen Daten geschätzt wurden.
Eine kleinere Verteilungsfunktion gehört zu größeren Werten.

Befehl: `ks.test(X,`F_0`)`

Ein-Stichproben-Tests

Lage

normalverteilt, Varianz bekannt $\Rightarrow$ Gauss-Test
normalverteilt, Varianz unbekannt $\Rightarrow$ spezieller t-Test
nicht normal $\Rightarrow$ Vorzeichentest
dichotom $\Rightarrow$ Binomial Test
diskret $\Rightarrow$ ... spezieller χ^2-Test (später)

Gausstest

Gausstest

Situation:

Test auf Mittelwert bei bekannter Varianz

H_0 : Erwartungswert μ von X ist μ_0: $\mu = \mu_0$

H_1 : Erwartungswert μ von X ist ungleich μ_0: $\mu \neq \mu_0$

Voraussetzungen:

repräsentative Stichprobe

X ist normalverteilt: $X_i \sim N(\mu, \sigma_0^2)$

σ_0^2 bekannt

Bemerkung:

Der Gauss-Test wird sehr selten auf reale Datensätze angewendet, da die Varianz fast nie bekannt ist. Er ist jedoch der wohl am leichtesten theoretisch zu verstehende Test und daher immer noch überall zu finden.

Befehl: `--`

Einstichproben t-Test

- ## Einstichproben t-Test

Situation:

Test auf Mittelwert bei unbekannter Varianz

H_0 : Erwartungswert μ von X ist μ_0: $\mu = \mu_0$

H_1 : Erwartungswert μ von X ist ungleich μ_0: $\mu \neq \mu_0$

Voraussetzungen:

repräsentative Stichprobe

X ist normalverteilt: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

σ^2 ist unbekannt

Bemerkung:

Befehl: `t.test(X)`

Einstichproben t-Test (einseitig)

Einstichproben t-Test (einseitig)

Situation:

Test auf Mittelwert bei unbekannter Varianz

$H_0 : \mu \leq \mu_0$

$H_1 : \mu > \mu_0$

Voraussetzungen:

repräsentative Stichprobe

X ist normalverteilt: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

σ^2 ist unbekannt

Bemerkung:

Entsprechende einseitige Test gibt es auch für kleiner und auch für viele andere Tests, wo wir das nicht im Einzelnen aufführen werden.

Befehl: `t.test(X,alternative="greater")`

Binomial Test

Binomial Test

Situation:

Test auf Erfolgswahrscheinlichkeit

H_0 : Die Wahrscheinlichkeit p für einen Erfolg ist p_0: $p = p_0$

H_1 : Die Wahrscheinlichkeit p für einen Erfolg ist nicht p_0: $p \neq p_0$

Voraussetzungen:

repräsentative Stichprobe
X ist Binomialverteilt mit
Erfolgswahrscheinlichkeit p: $X \sim Bi(p, n_0)$
Die Anzahl der Versuche n_0 ist bekannt

Bemerkung:

Befehl: `binom.test(sum(X),`n_0`*length(X))`

Vorzeichentest

- ## Vorzeichentest

  Situation:

  Test auf bestimmten Median

  H_0 : Der Median der Verteilung von X ist m_0: $F_X(0.5) = m_0$

  H_1 : Der Median der Verteilung von X ist nicht m_0: $F_X(0.5) \neq m_0$

  Voraussetzungen:

  repräsentative Stichprobe
  Verteilungsfunktion F_X im Median stetig

  Bemerkung:

  Befehl: `binom.test(table(X<`m_0`))`

Ein-Stichproben-Tests

Streuung

normalverteilt $\Rightarrow$ χ^2-Test (Chi-Quadrat-Test)
nicht normal $\Rightarrow$ ... problematisch

χ^2-Test auf Varianz

- **χ^2-Test auf Varianz**

  Situation:

  Test auf gegebenen Varianz bei normalverteilten Daten.

  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

  $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ oder $\sigma^2 > \sigma_0^2$ oder $\sigma^2 < \sigma_0^2$

  Voraussetzungen:

  repräsentative Stichprobe

  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

  Bemerkung:

  Befehl: --

Zwei-Stichproben-Tests

Verteilung

stetig $\Rightarrow$ zwei Stichproben KS-Test

diskret $\Rightarrow$ . . . Tafeltests (später)

Zwei Stichproben Kolmogorov-Smirnov-Test

- **Zwei Stichproben Kolmogorov-Smirnov-Test**

  Situation:

  Testet die Gleichheit der stetigen Verteilungen der Stichproben

  $H_0 : F_X \equiv F_Y$

  $H_1 : F_X \not\equiv F_Y$

  Voraussetzungen:

  repräsentative Stichproben
  Für X und Y wurde die gleiche Rundungsregel verwendet

  Bemerkung:

  Befehl: `ks.test(X,Y)`

Zwei-Stichproben-Tests

Lage

normalverteilt $\Rightarrow$ Zwei Stichproben t-test

nicht normal aber stetig $\Rightarrow$ Wilcoxen-Vorzeichen-Rang Test

Zwei-Stichproben-t-Test

- **Zwei-Stichproben-t-Test**

  Situation:

  Vergleich von Mittelwerten zweier Stichproben bei Normalverteilung und gleicher Varianz

  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$

  $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ oder $\mu_X > \mu_Y$ oder $\mu_X < \mu_Y$

  Voraussetzungen:

  repräsentative Stichproben

  $X_i \sim N(\mu_X, \sigma^2)$ und $Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$

  Bemerkung:

  Die Normalverteilungsvoraussetzung ist relativ unkritisch, solange keine Ausreißer vorliegen und Verteilung ungefähr normal ist. Die Normalverteilungsvoraussetzung kann mit dem Shapiro-Wilk Test und die Varianzgleichheit mit dem F-Test überprüft werden.

  Befehl: `t.test(X,Y,var.equal=TRUE)`

Welchs t–Test

Welchs t–Test

Situation:

Vergleich von Mittelwerten zweier Stichproben bei Normalverteilung und verschiedener Varianz

$H_0 : \mu_X = \mu_Y$

$H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ oder $\mu_X > \mu_Y$ oder $\mu_X < \mu_Y$

Voraussetzungen:

repräsentative Stichproben

$X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, i.i.d.

Bemerkung:

Die Normalverteilungsvoraussetzung ist relativ unkritisch, solange keine Ausreißer vorliegen und Verteilung ungefähr normal ist.

Befehl: `t.test(X,Y)`

Wilcoxen–Rang–Summen–Test

- ## Wilcoxen–Rang–Summen–Test

  Situation:

  Vergleich der Lage zweier Stichproben mit stetiger Verteilung

  $H_0 : \forall x : F_X(x) = F_Y(x)$

  $H_1 : \exists c \neq 0 : \forall x : F_X(x) = F_Y(x - c)$

  Voraussetzungen:

  repräsentative Stichproben
  die Verteilungen F_X und F_Y sind stetig.

  Bemerkung:

  Dieser Test arbeitet auch für andere Alternativen gut, bei der eine Gruppe größere Werte hat.

  Befehl: `wilcox.test(X,Y)`

Zwei-Stichproben-Tests

Streuung

normalverteilt $\Rightarrow$ F-test
nicht normal aber stetig $\Rightarrow$ Fligner Test

F-Test

- ## F-Test

  Situation:

  Test auf Gleichheit der Varianz bei Normalverteilung

  $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

  $H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ oder $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ oder $\sigma_X^2 < \sigma_Y^2$

  Voraussetzungen:

  repräsentative Stichproben

  $X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

  Bemerkung:

  Befehl: `var.test(X,Y)`

Fligner-Test

Für den nichtparametrischen Streuungsvergleich eignet sich auch der Fligner-Test, der als Mehrstichprobentest besprochen wird.

```
fligner.test(list(X,Y))
```

Gepaarte-Tests

Lage

normalverteilt $\Rightarrow$ gepaarter t-test
nicht normal aber stetig $\Rightarrow$ Wilcoxen-Vorzeichen-Rang Test

gepaarter t-Test

gepaarter t-Test

Situation:

Die Werte jeweils zweier aufeinanderfolgender Messungen am gleichen statistischen Individuum sollen verglichen werden.

$H_0 : E[X - Y] = 0$

$H_1 : E[X - Y] \neq 0$ oder

Voraussetzungen:

repräsentative Stichprobe

$X_i - Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

Bemerkung:

Dieses normalverteilungsbasierte Verfahren hat Probleme mit Ausreißern in der Differenz.

Befehl: `t.test(X,Y,paired=TRUE)`

Wilcoxen-Vorzeichen-Rang-Test

- ## Wilcoxen-Vorzeichen-Rang-Test

  Situation:

  Testet auf eine mittlere Änderung von 0 zwischen beiden Beobachtungen am gleichen Individuum.

  H_0 : Die Verteilung von $X_i - Y_i$ ist symmetrisch um 0.

  H_1 : Die Verteilung von $X_i - Y_i$ ist symmetrisch um ein $c \neq 0$

  Voraussetzungen:

  Die Verteilung ist für alle Paare gleich.

  Bemerkung:

  Dieses rangbasierte Verfahren hat Probleme mit Bindungen in den Differenzen.

  Befehl: `wilcox.test(X,Y,paired=TRUE)`

Tests auf Abhängigkeit

stetige Größen

$\Rightarrow$ Korrelationstests

Pearson–Korrelationstest

Pearson–Korrelationstest

Situation:

Test auf Pearson-Korrelation gleich 0

$H_0 : \mathrm{cor}(X, Y) = 0$

$H_1 : \mathrm{cor}(X, Y) \neq 0$

Voraussetzungen:

repräsentative Stichprobe

X,Y gemeinsam normalverteilt

Bemerkung:

Befehl: `cov.test(X,Y)`

Spearman–Korrelationstest

- ## Spearman–Korrelationstest

Situation:

Test auf Spearman-Rang-Korrelation

$H_0 : \mathrm{cor}(X, Y) = 0$

$H_1 : \mathrm{cor}(X, Y) \neq 0$ oder $\mathrm{cor}(X, Y) > 0$ oder $\mathrm{cor}(X, Y) < 0$

Voraussetzungen:

repräsentative Stichproben
stetige Verteilung / wenige Bindungen

Bemerkung:

Befehl: `cov.test(X,Y,method="spearman")`

Tests auf Abhängigkeit

diskrete Größen

dichotom $\Rightarrow$ Fishers exakter Test

viele $\Rightarrow$ (spezieller) χ^2-Test

sonst $\Rightarrow$ $\ldots$ problematisch

χ^2-Test auf Unabhängigkeit in Kontingenztafeln

Situation:

Test auf Unabhängigkeit von kategoriellen Merkmalen

$H_0 : X$ und Y sind stochastisch unabhängig

$H_1 : X$ und Y sind stochastisch abhängig

Voraussetzungen:

repräsentative Stichprobe
kategorielle Merkmale

Bemerkung:

Der p-Wert des Tests wird nur approximativ berechnet. Die Approximation ist schlecht, wenn in einzelnen Zellen der Datentafel unter der Unabhängigkeitsannahme weniger als 3-5 Werte zu erwarten sind.

Befehl: `chisq.test(table(X,Y))`

Fishers exakter Test

- ## Fishers exakter Test

Situation:

Test auf Unabhängigkeit von 2x2 Kontingenztafeln und dichtomer Merkmale

H_0 : Die Merkmale sind stochastisch Unabhängig

H_1 : Die Merkmale sind stochastisch abhängig

Voraussetzungen:

repräsentative Stichprobe
dichotome Merkmale

Bemerkung:

Im Gegensatz zum χ^2-Test auf Unabhängigkeit wird hier keine Approximation verwendet. Der Test ist also immer dann vorzuziehen, wenn er in der Situation anwendbar ist.

Befehl: `fisher.test(table(X,Y))`

Tests auf Abhängigkeit

Stetige Größe Abhängig von diskreter Größe

dichotom $\Rightarrow$ Zwei-Stichproben-Test
mehrere Kategorien $\Rightarrow$ Mehr-Stichproben-Test

Mehrstichproben Tests

Lage

Normalverteilt, homoskedastisch $\Rightarrow$ Varianzanalyse
immerhin stetig $\Rightarrow$ ... Kruskal-Wallis-Test

Einfache Varianzanalyse

Einfache Varianzanalyse

Situation:

Test auf Gleichheit der Erwartungswerte mehrerer normalverteilter Stichproben.

$H_0 : \forall g, g' : \mu_g = \mu_{g'}$

$H_1 : \exists g, g' : \mu_{g_i} \neq \mu_j$

Voraussetzungen:

repräsentative Stichproben

$X_i \sim N(\mu_{g_i}, \sigma^2)$ wobei g_i die Gruppenzugehörigkeit des Individuums i beschreibt.

Bemerkung:

Die Varianzanalyse setzt die Gleichheit der Varianz und Normalverteilung voraus.

Befehl: `anova(lm(X~G))`

Kruskal–Wallis–Test

- **Kruskal–Wallis–Test**

  Situation:

  Test auf Gleichheit der Lage mehrerer stetig verteilter Stichproben.

  H_0 : Alle Gruppen haben die gleiche Verteilung

  H_1 : Die Verteilungen der Gruppen sind gegeneinander verschoben.

  Voraussetzungen:

  repräsentative Stichproben
  eigentlich: gleiche nur verschobene Verteilung

  Bemerkung:

  Der Kruskal Wallis Test ist ein Rangbasiertes Verfahrung und ist damit potentiell anfällig gegegen zu viele gleiche Messwerte.

  Befehl: `kruskal.test(X,G)`

Mehrstichproben Tests

Streuung

normalverteilt $\Rightarrow$ Bartlett–Test

immerhin stetig $\Rightarrow$ Fligner–Test

Bartlett–Test

- ## Bartlett–Test

  Situation:

  Testet auf gleiche Varianz in mehrere Stichproben

  H_0 : Die Varianzen der Stichproben sind gleich

  H_1 : Die Varianzen der Stichproben sind nicht alle gleich.

  Voraussetzungen:

  repräsentative Stichproben

  $X_i \sim N(\mu_{G_i}, \sigma_{G_i})$

  Bemerkung:

  Dieser Test wird oft eingesetzt, um eine Voraussetzung der Varianzanalyse zu überprüfen.

  Befehl: `bartlett.test(X,G)`

Fligner–Test

Fligner–Test

Situation:

Testet auf gleiche Streuung in mehreren Stichproben

H_0 : Die Streuungen der Stichproben sind gleich.

H_1 : Die Streuungen der Stichproben sind unterschiedlich.

Voraussetzungen:

repräsentative Stichproben

stetige Verteilung

Bemerkung:

Befehl: `fligner.test(X,G)`

Übersicht

Stetige Skala

interessierende Parameter		Voraus-setzung	Stichprobensituation: Ein-	Zwei-	Mehr-	gepaart/bivariat
Lage	normal	homo-skedastisch	Ein-Stichproben t-test	Zwei-Stichproben t-test	Varianzanalyse (ANOVA)	gepaarter t-test
Lage	normal	hetero-skedastisch		Welchs t-test	???	
Lage	stetig		Vorzeichentest	Wilcoxen Rang-Summen Test	Kruskal-Wallis-Test	Wilcoxen Vorzeichen-Rang Test
Streuung	normal		χ2-Test auf Streuung	F-Test	Bartlett-Test	χ2-Test auf Streuung auf Differenzen
Streuung	stetig		???	???	Fligner-Test	???
Verteilung		normal?	Shapiro-Wilk-Test	Shapiro-Wilk-Test auf beiden Stichp	Shapiro-Wilk-Test auf jeder Stichp	Shapiro-Wilk-Test auf Differenzen
Verteilung		identisch?		Z.-S.-K.-S.-Test	???	
Verteilung		speziell?	E.-S.-K.-S.-Test χ2-Test auf Vert.		E.-S.-K.-S.-Test auf jeder Stichp	E.-S.-K.-S.-Test auf Differenzen
Abhängigkeit		normal	Lineare Modelle			Pearson-Korrelations-Test
Abhängigkeit		speziell/ stetig	Generalisierte Lineare Modelle			Spearman-Korrelations-Test

Zwischenschritte