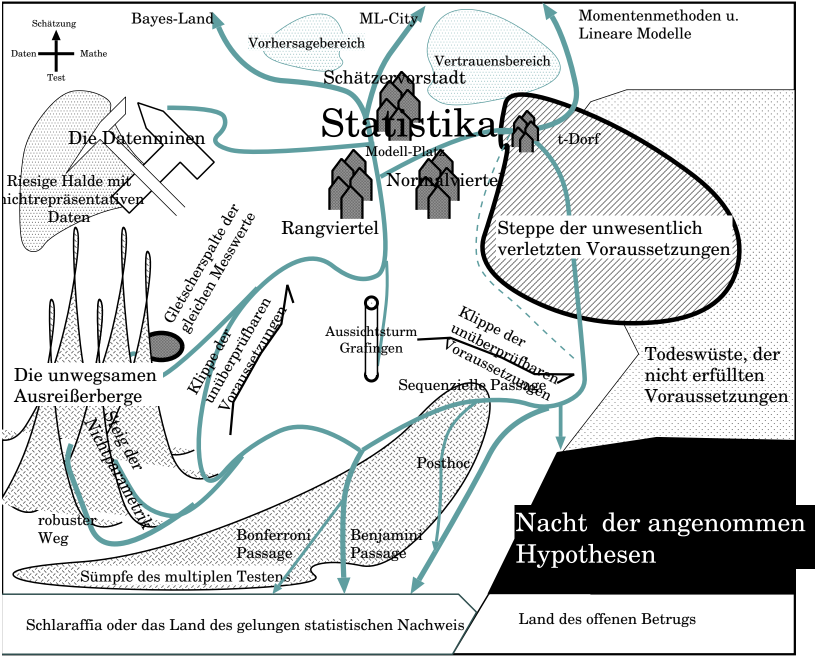
Statistik

Vorlesung 2 (Graphiken für stetige Daten)

K.Gerald van den Boogaart
http://www.stat.boogaart.de

29. Oktober 2019



Schätzung
Daten
Mathe
Test
Bayes-Land
ML-City
Momentenmethoden u. Lineare Modelle
Vorhersagebereich
Vertrauensbereich
Schätzervorstadt
Statistika
Die Datenminen
Riesige Halde mit nichtrepräsentativen Daten
Modell-Platz
t-Dorf
Normalviertel
Rangviertel
Gletscherspalte der gleichen Messwerte
Steppe der unwesentlich verletzten Voraussetzungen
Klippe der unüberprüfbaren Voraussetzungen
Aussichtsturm Grafingen
Klippe der unüberprüfbaren Voraussetzungen
Todeswüste, der nicht erfüllten Voraussetzungen
Sequenzielle Passage
Die unwegsamen Ausreißerberge
Steig der Nichtparametrik
Posthoc
robuster Weg
Bonferroni Passage
Benjamini Passage
Nacht der angenommen Hypothesen
Sümpfe des multiplen Testens
Schlaraffia oder das Land des gelungen statistischen Nachweis
Land des offenen Betrugs

Einteilung der Graphiken und Parameter

		Erste Variable	
		diskret	stetig
	keine	?	?
zweite Variable	diskret	?	?
	stetig	?	?

- stetige Daten
- diskrete Daten
- stetig–stetig
- diskret–diskret
- diskret–stetig

Lernziele

Zu jeder Graphik lernen wir:

- Für welche Daten eignet sich die Graphik?

Warum lernen wir das?

Lernziele

Zu jeder Graphik lernen wir:

- Für welche Daten eignet sich die Graphik?
- Wie ist die Graphik aufgebaut?

Warum lernen wir das?

Lernziele

Zu jeder Graphik lernen wir:

- Für welche Daten eignet sich die Graphik?
- Wie ist die Graphik aufgebaut?
- Was kann man in der Graphik sehen?

Warum lernen wir das?

Lernziele

Zu jeder Graphik lernen wir:

- Für welche Daten eignet sich die Graphik?
- Wie ist die Graphik aufgebaut?
- Was kann man in der Graphik sehen?
- Woran kann man es erkennen?

Warum lernen wir das?

Lernziele

Zu jeder Graphik lernen wir:

- Für welche Daten eignet sich die Graphik?
- Wie ist die Graphik aufgebaut?
- Was kann man in der Graphik sehen?
- Woran kann man es erkennen?
- Was übersieht man in der Graphik?

Warum lernen wir das?

Lernziele

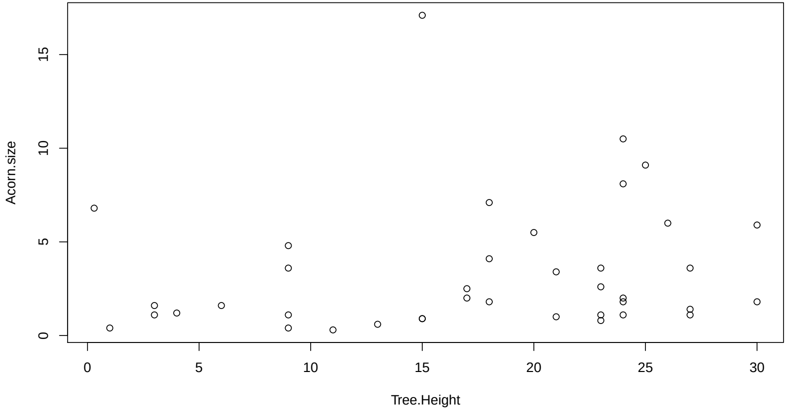
Zu jeder Graphik lernen wir:

- Für welche Daten eignet sich die Graphik?
- Wie ist die Graphik aufgebaut?
- Was kann man in der Graphik sehen?
- Woran kann man es erkennen?
- Was übersieht man in der Graphik?
- Für welche Fragestellungen eignet sich die Graphik?

Warum lernen wir das?

Vorbereitung: Darstellung des Wertes durch die Lage

Streudiagramm

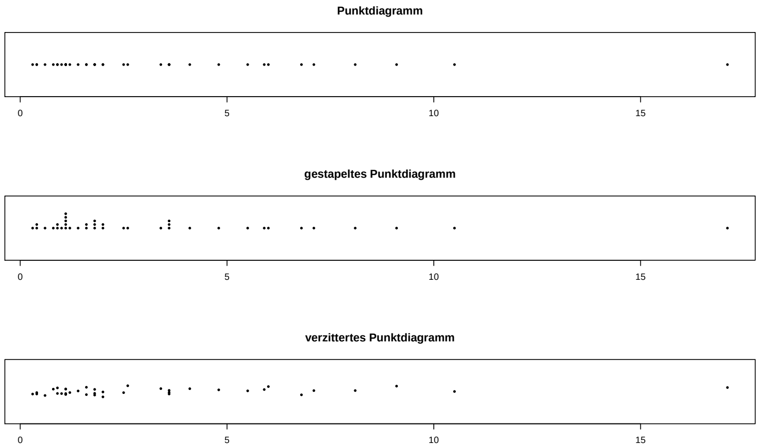


Graphiken für stetige Daten

- Punktdiagramm (stapeln, verzittern)
- Histogramm
- Kastendiagramm / Boxplot
- Q Q-Plots (Quantils-Quantils Plot)
- (Empirische Verteilungsfunktion)

		Erste Variable	
		diskret	stetig
	keine		X
zweite Variable	diskret		
	stetig		

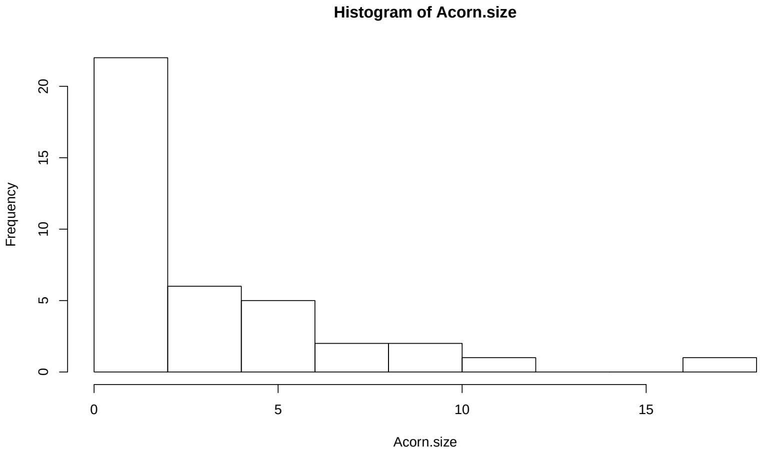
Punktdiagramm



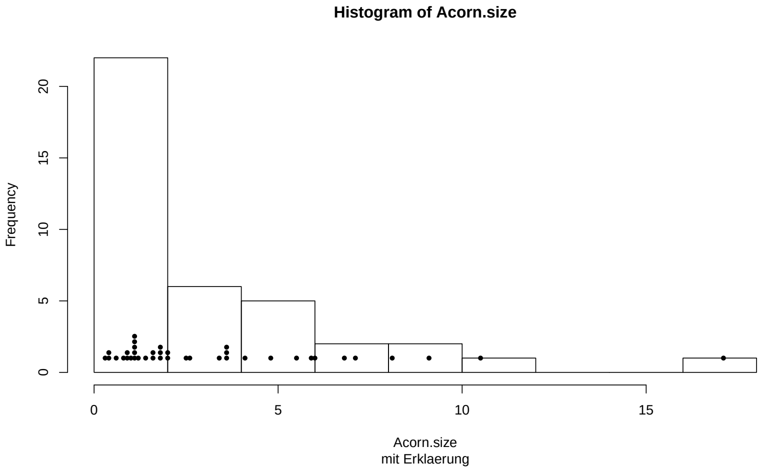
Punktdiagramm

- Vollständig bis auf Überdeckung
- Verzittern und Stapeln
- Was “sieht” man?

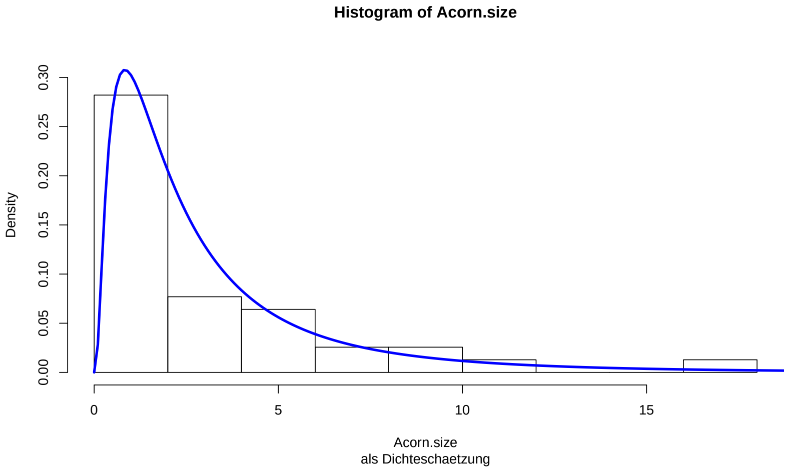
Histogramm


Histogram of Acorn.size
Frequency
0
5
10
15
20
0
5
10
15
Acorn.size

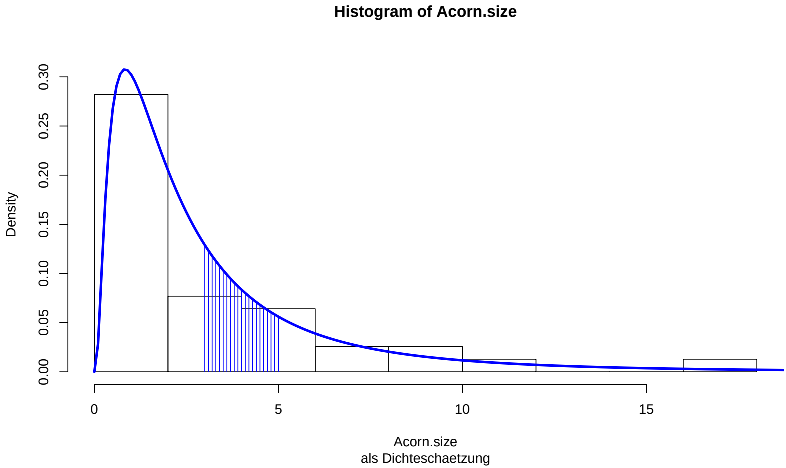
Histogramm


Histogram of Acorn.size
Frequency
0
5
10
15
20
0
5
10
15
Acorn.size
mit Erklaerung

Histogramm und Wahrscheinlicheitsdichtefunktion



Wahrscheinlicheitsdichtefunktion $f(x)$

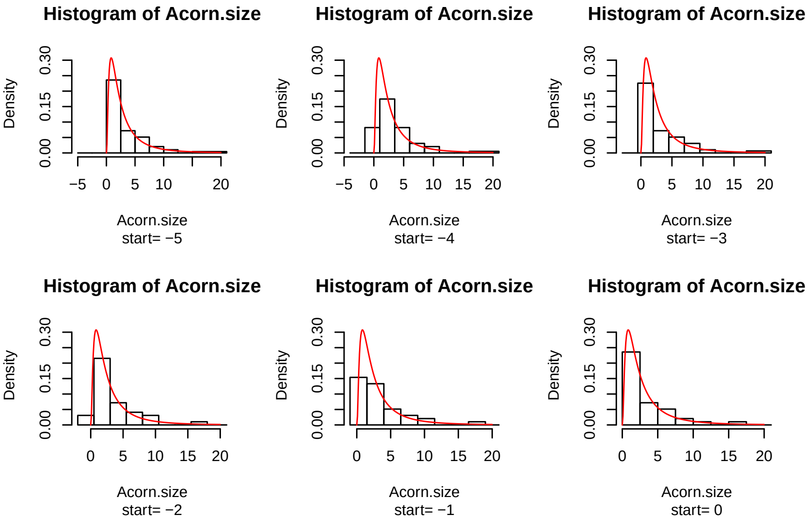


$$P([a,b]) = \int_a^b f(x)dx = \text{Fläche unter der Kurve}$$

Histogramm

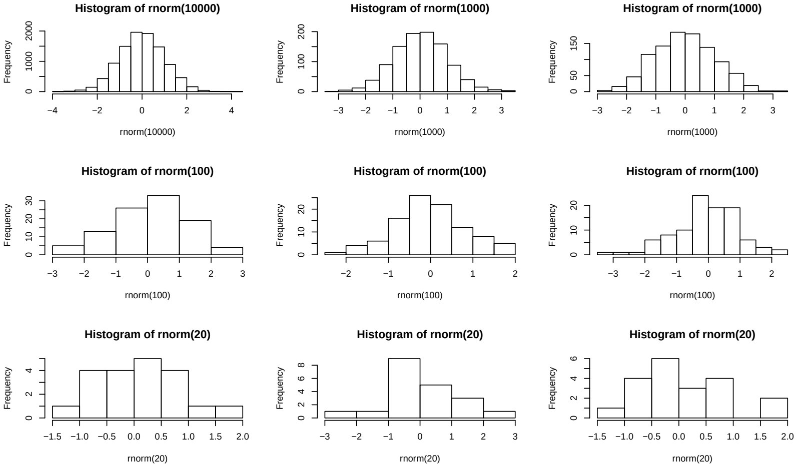
- Stellt Anzahl von Datenpunkten im Intervall dar.
- Stellt die Dichte (Datenpunkte pro Punkt und Einheitslänge) der Punkte dar.
- Balkenhöhe ist zufällig.
- Variation von Balkenanfang und Balkenanzahl führt zu verschiedenen Eindrücken.
- Zu kleine Balken $\Rightarrow$ “Zufallsflimmer”
- Zu große Balken $\Rightarrow$ Information zu sehr zusammengefaßt.
- Extreme Ausreißer eventuell am linken oder rechten Rand erkennbar.

Einfluß des Balkenanfangs

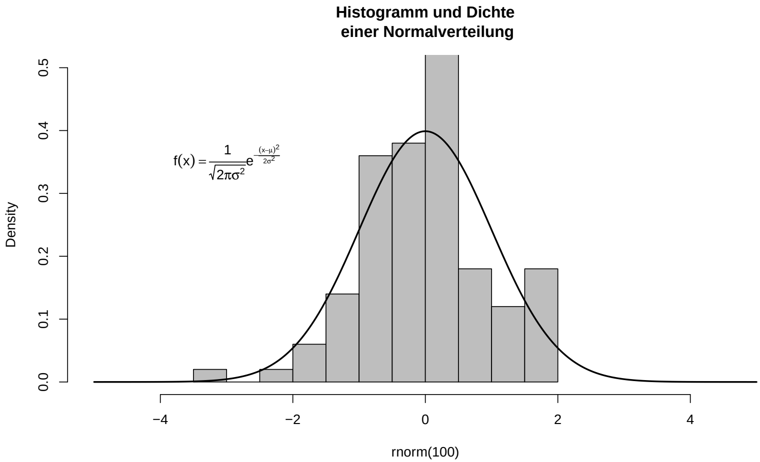


Beschreibung der Verteilungsform und Normalverteilung als Referenzverteilung

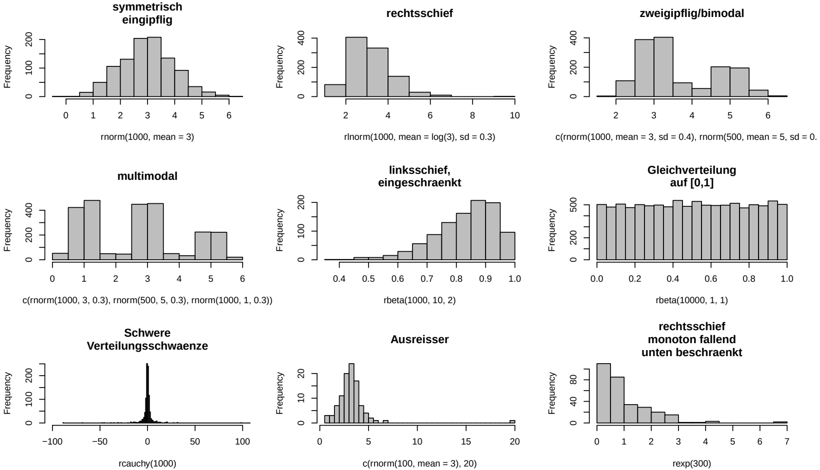
Normalverteilung



Dichte der Normalverteilung



Verteilungseigenschaften



Kenngrößen und Parameter

- Lage

Kenngrößen und Parameter sind konventionelle Zusammenfassungen der Daten in einzelne Zahlen, die jeweils einen bestimmten Aspekt quantiativ erfassen.

Kenngrößen und Parameter

- Lage
- Streuung

Kenngrößen und Parameter sind konventionelle Zusammenfassungen der Daten in einzelne Zahlen, die jeweils einen bestimmten Aspekt quantiativ erfassen.

Kenngrößen und Parameter

- Lage
- Streuung
- Form

Kenngrößen und Parameter sind konventionelle Zusammenfassungen der Daten in einzelne Zahlen, die jeweils einen bestimmten Aspekt quantiativ erfassen.

Kenngrößen und Parameter

- Lage
- Streuung
- Form
- Verteilung

Kenngrößen und Parameter sind konventionelle Zusammenfassungen der Daten in einzelne Zahlen, die jeweils einen bestimmten Aspekt quantiativ erfassen.

Lageparameter

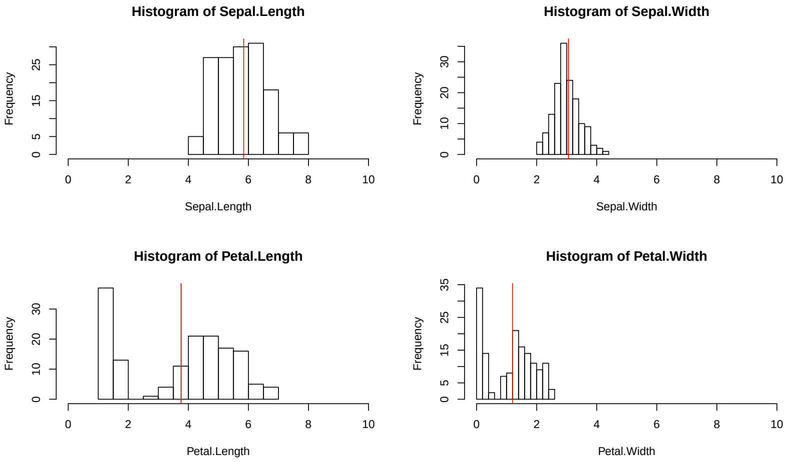
- Lage
  - Mittelwert (geometrisch und arithmetisch)
  - Median
  - Modus
  - Quantile (Quartile, Dezentile)
- Streuung
- Form
- Verteilung

(arithmetischer) Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

```
> mean(iris$Sepal.Length)
[1] 5.843333
```

Mittelwert



Histogram of Sepal.Length
Frequency
0
5
15
25
0
2
4
6
8
10
Sepal.Length
Histogram of Sepal.Width
Frequency
0
10
20
30
0
2
4
6
8
10
Sepal.Width
Histogram of Petal.Length
Frequency
0
10
20
30
0
2
4
6
8
10
Petal.Length
Histogram of Petal.Width
Frequency
0
5
15
25
35
0
2
4
6
8
10
Petal.Width

(geometrischer) Mittelwert

Für die ratio-Skala gibt es noch den geometrischen Mittelwert

$$\bar{x} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

```
> exp(mean(log(iris$Sepal.Length)))
[1] 5.78572
```

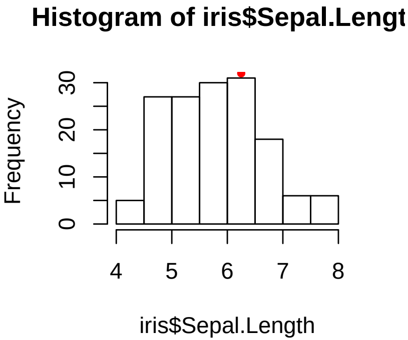
Median

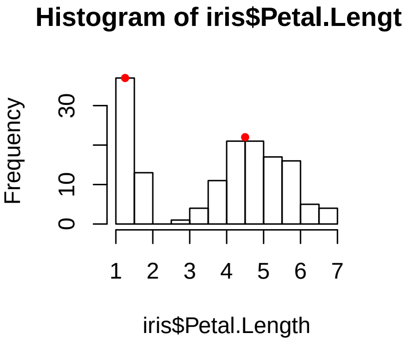
Der Median ist der mittlere Wert:

```
> median( c(4,5,1,3,6,7,8))
[1] 5
> median( c(4,1,3,6,7,8))
[1] 5
> median(iris$Sepal.Length)
[1] 5.8
> sapply(iris[,1:4],median)
Sepal.Length  Sepal.Width Petal.Length  Petal.Width
        5.80         3.00         4.35         1.30
```

Modus

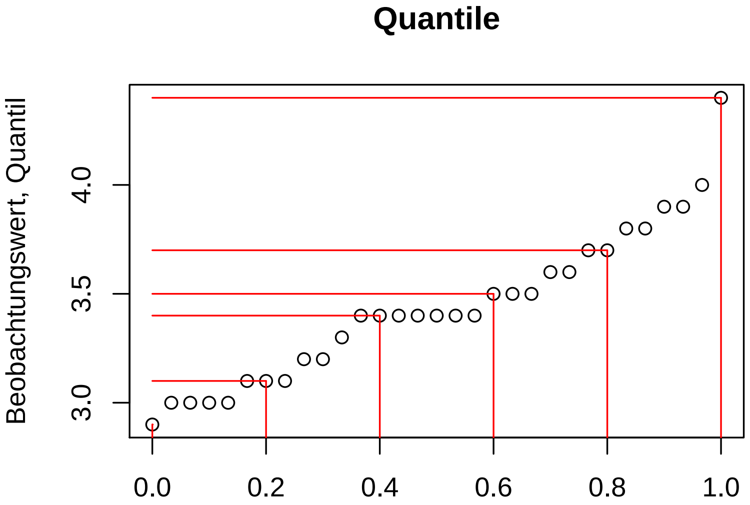
Der Modus oder Modalwert bezeichnet den Bereich mit der größten Punktdichte.





Quantile

Das (empirische) p-Quantil $\hat{q}_p$ ist der Wert für den der Anteil p des sortierten Datensatzes kleiner ist.



Spezielle Quantile

- $\frac{1}{2}$-Quantil ist der Median
- $\frac{1}{4}$-Quantil heißt auch **erstes Quartil**
- $\frac{3}{4}$-Quantil heißt auch **drittes Quartil**
- $\frac{n}{10}$-Quantil heißt auch **n-tes Dezentil**
- 0-Quantil heißt auch Minimum (sehr zufällig!!!)
- 1-Quantil heißt auch Maximum (sehr zufällig!!!)

Streuparameter

- Lage
- Streuung
  - Varianz
  - Standardabweichung
  - IQR
  - Variationkoeffizient
  - geometrische Standardabweichung
- Form
- Verteilung

Streuparameter für die relle Skala

- Varianz

$$\widehat{var}(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Streuparameter für die relle Skala

- Varianz

$$\widehat{var}(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

- Standardabweichung

$$\widehat{sd}(X) = \sqrt{\widehat{var}(X)}$$

Streuparameter für die relle Skala

- Varianz

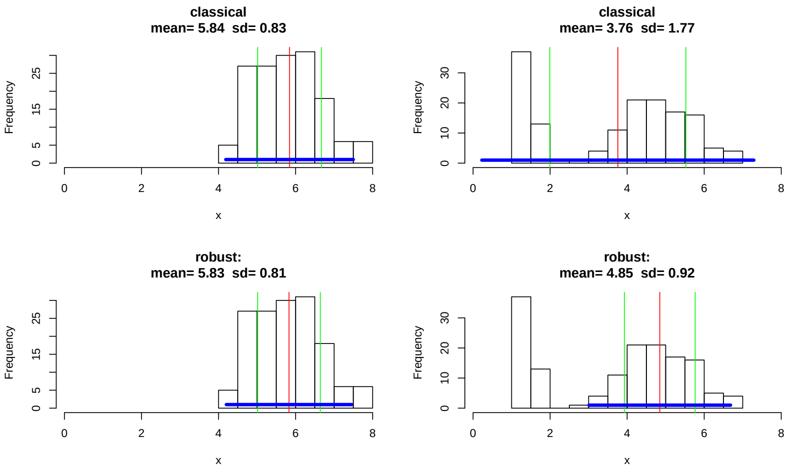
$$\widehat{var}(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

- Standardabweichung

$$\widehat{sd}(X) = \sqrt{\widehat{var}(X)}$$

- Interquartilsabstand

$$\widehat{\mathrm{IQR}}(X) = q_{0.75} - q_{0.25}$$


classical
mean= 5.84 sd= 0.83
classical
mean= 3.76 sd= 1.77
robust:
mean= 5.83 sd= 0.81
robust:
mean= 4.85 sd= 0.92
Frequency
x
0
2
4
6
8
0
5
15
25
10
20
30

Streuparameter für die ratio Skala

- Variationskoeffizient

$$\widehat{v}(X) = \frac{\widehat{sd}(X)}{\bar{x}}$$

Streuparameter für die ratio Skala

- Variationskoeffizient

$$\widehat{v}(X) = \frac{\widehat{sd}(X)}{\bar{x}}$$

- Standardabweichung des Logarithmus

$$\widehat{sd}(\ln(X))$$

Streuparameter für die ratio Skala

- Variationskoeffizient

$$\widehat{v}(X) = \frac{\widehat{sd}(X)}{\bar{x}}$$

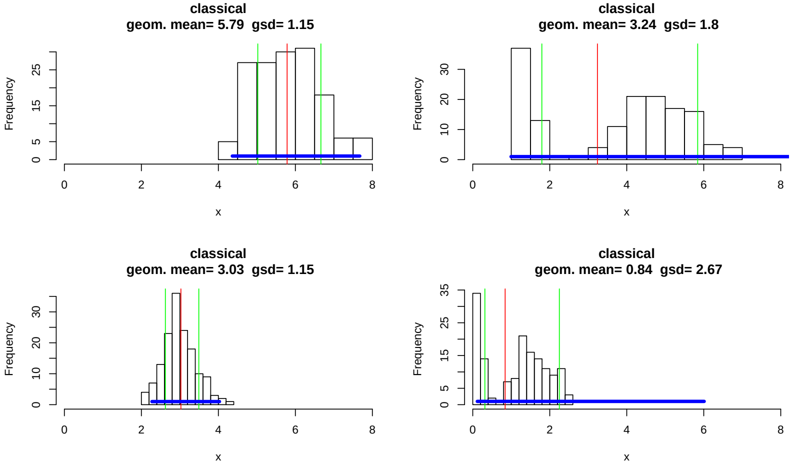
- Standardabweichung des Logarithmus

$$\widehat{sd}(\ln(X))$$

- Geometrische Standardabweichung

$$exp(\widehat{sd}(\ln(X)))$$

Blick mit der Ratioskala



Weitere Parameter

- Lage
- Streuung
- Form
  - Schiefe $\widehat{skewness}(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X-\bar{X})^3}{\widehat{sd}(X)^3}$
  - Wölbung $\widehat{kurtosis}(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X-\bar{X})^4}{\widehat{sd}(X)^4}$
  - ...
- Verteilung
  - Hängt vom Verteilungsmodell ab.
    e.g. Ausfallrate λ bei Exponentialverteilung, Untergrenze x_{min} und Exponent k bei der Paretoverteilung

Emprirische und theoretische Größen

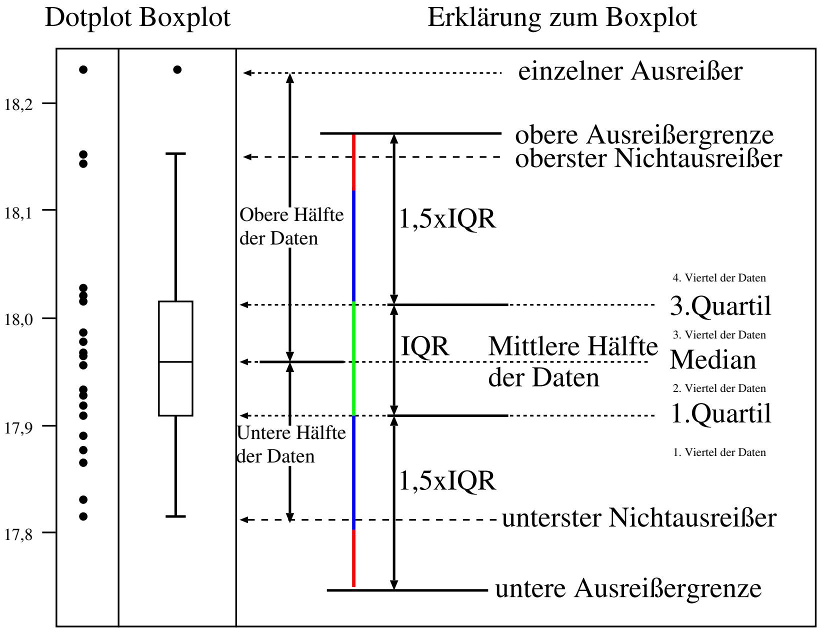
- empirisch: Ermittelt für die Stichprobe

$$\bar{X}, \widehat{var}(X), \widehat{sd}(X), \ldots$$

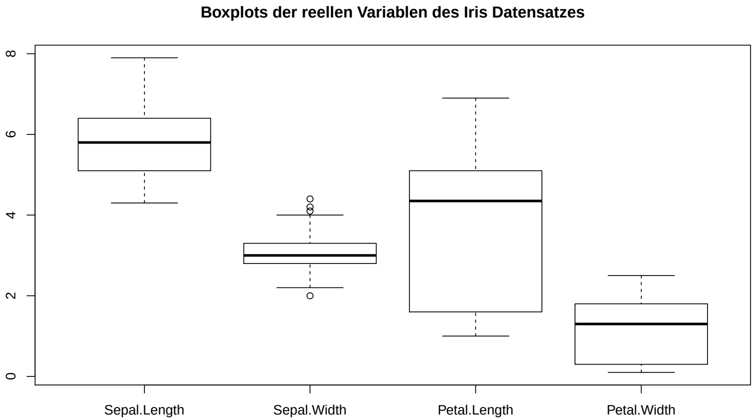
- theoretisch (wahr): Ermittelt für Grundgesamtheit / wahre Verteilung

$$E[X], var(X), sd(X), \ldots$$

Kastendiagramm/Boxplot



Kastendiagramme / Boxplot



Interpretation

- **Ausreißer**
- **Stichprobenlage / Median**
- **Stichprobenstreuung / IQR**
- **Symmetrie und Schiefe der Verteilung**
- **eventuell extreme Werthäufungen**

Exkurs: Ausreißer

Definition: Ein Ausreißer ist ein Datenpunkt der einen "ungewöhnlich" extremen Wert hat.
Mögliche Ursachen:

- Zufall (Es gibt halt extreme Werte)

Exkurs: Ausreißer

Definition: Ein Ausreißer ist ein Datenpunkt der einen "ungewöhnlich" extremen Wert hat.
Mögliche Ursachen:

- Zufall (Es gibt halt extreme Werte)
- Schwere Verteilungsschwänze (Ausreißer hier typisch)

Exkurs: Ausreißer

Definition: Ein Ausreißer ist ein Datenpunkt der einen "ungewöhnlich" extremen Wert hat.
Mögliche Ursachen:

- Zufall (Es gibt halt extreme Werte)
- Schwere Verteilungsschwänze (Ausreißer hier typisch)
- Datenfehler oder Übermittlungsfehler

Exkurs: Ausreißer

Definition: Ein Ausreißer ist ein Datenpunkt der einen "ungewöhnlich" extremen Wert hat.
Mögliche Ursachen:

- Zufall (Es gibt halt extreme Werte)
- Schwere Verteilungsschwänze (Ausreißer hier typisch)
- Datenfehler oder Übermittlungsfehler
- Untypischer Spezialfall (der Millionär mit Zweitwohnsitz im armen Bergbauerndorf)

Exkurs: Ausreißer

Definition: Ein Ausreißer ist ein Datenpunkt der einen "ungewöhnlich" extremen Wert hat.
Mögliche Ursachen:

- Zufall (Es gibt halt extreme Werte)
- Schwere Verteilungsschwänze (Ausreißer hier typisch)
- Datenfehler oder Übermittlungsfehler
- Untypischer Spezialfall (der Millionär mit Zweitwohnsitz im armen Bergbauerndorf)
- Individum fehlerhafterweise in der Stichprobe (z.B. andere Art)

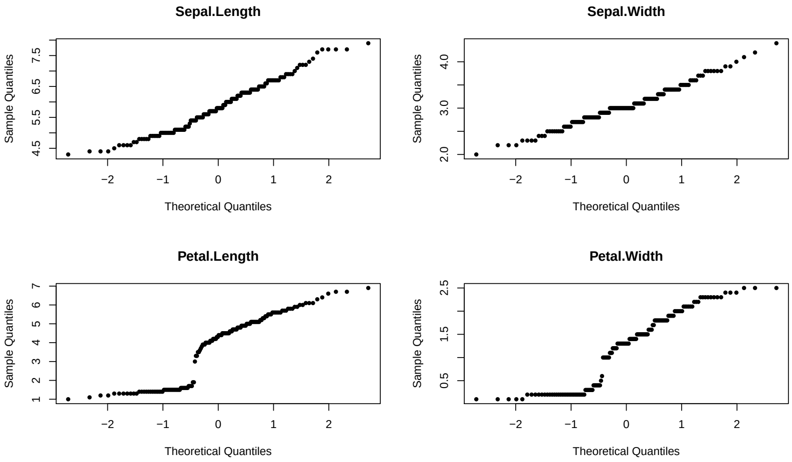
Exkurs: Ausreißer

Definition: Ein Ausreißer ist ein Datenpunkt der einen "ungewöhnlich" extremen Wert hat.

Mögliche Ursachen:

- Zufall (Es gibt halt extreme Werte)
- Schwere Verteilungsschwänze (Ausreißer hier typisch)
- Datenfehler oder Übermittlungsfehler
- Untypischer Spezialfall (der Millionär mit Zweitwohnsitz im armen Bergbauerndorf)
- Individum fehlerhafterweise in der Stichprobe (z.B. andere Art)
- Anthropogene Überprägung (das verlorene Geldstück mit hohem Kupfergehalt.)

QQ-Plots /Quantile – Quantile – Plot



Interpretation Q Q-Plot

- Ungefähre Gerade $\Leftrightarrow$ Verteilungsmodell passend
- “Treppenstufen” $\Leftrightarrow$ Bindungen (gleiche Werte)
- “Gegen S” $\Leftrightarrow$ Ausreißer? schwere Verteilungsschwänze?

Exkurs: Bindungen

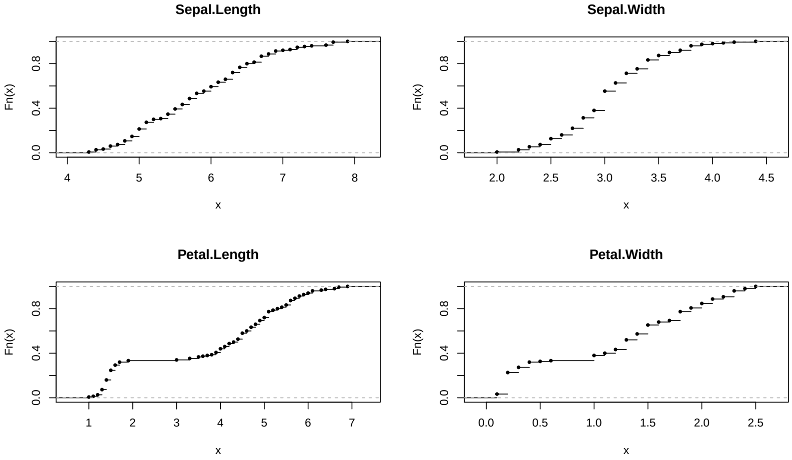
Definition: Von einer **Bindung** spricht man, wenn ein Datenwert in einer stetigen Variable zwei oder mehrfach auftritt.
Mögliche Ursachen:

- Rundung
- Ungenau Datenerhebung
- Spezieller Wert hat positive Wahrscheinlichkeit
- Variable nicht wirklich stetig

Manche statistische Verfahren verlieren an zunehmend an Genauigkeit je mehr Bindungen auftreten.

Empirische Verteilungsfunktion

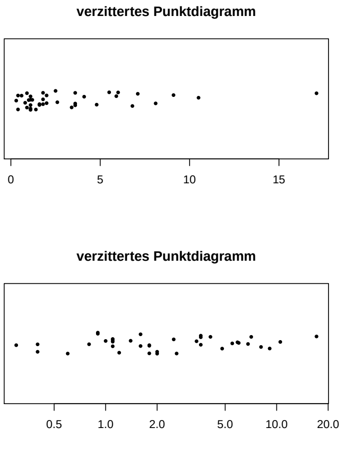
$$\hat{F}(x) = \text{Anteil des Datensatzes} \leq x$$



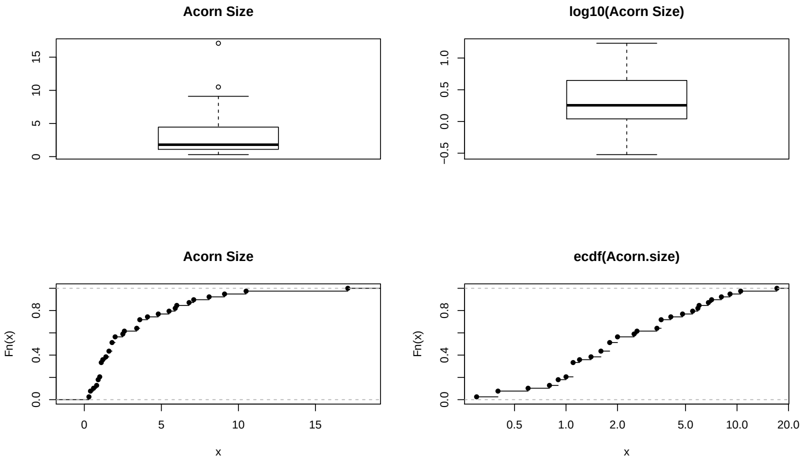
Emprische Verteilungsfunktion

- Quantile können leicht abgelesen werden.
- Wahrscheinlichkeiten können leicht abgelesen werden.
- Bindungen erzeugen hohe Sprünge (fast unsichtbar).
- Sonst kann eigentlich nichts abgelesen werden.

Log-Transformation bei Ratioskala I



Log-Transformation bei Ratioskala II



Log-Transformation bei Ratioskala III

- Tip: Bei ratio-Daten lohnt es sich oft auch den Logrithmus der Daten als Daten anzusehen.
- Ratioskalierte Daten habe nur positive Werte
- Eine logrithmische Darstellung
  - zeigt den richtigen Abstandsbegriff (Verhältnisse werden zu Abständen)
  - zeigen oft eine größere Annäherung an die Normalverteilung (z.B. keine Ausreißer)
- Punktdiagram, empirische Verteilungsfunktion:
  - Man kann einfach die x-Achse logarithmisch einteilen
- Histogramm, Boxplot:
  - Darstellung mit log-Daten wird prinzipiell anders

Logit-Transformation bei Anteilskala

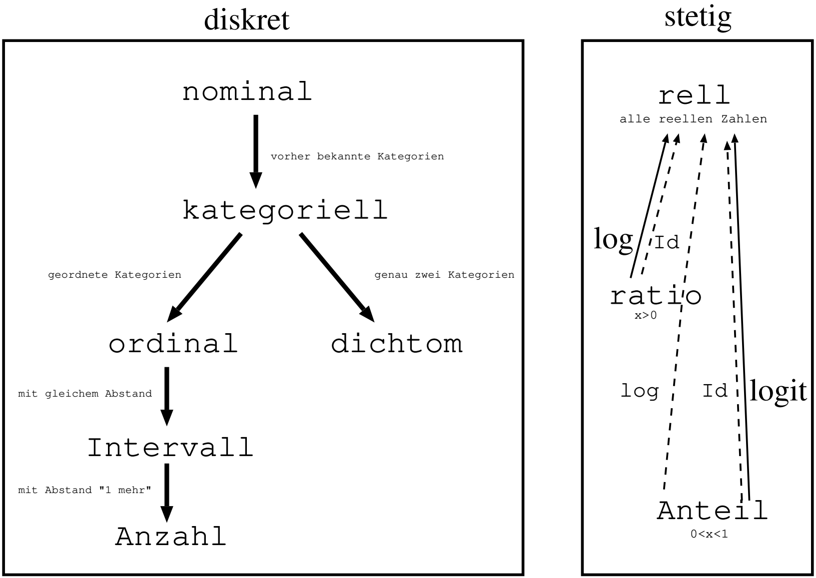
Bei Anteilskalierten Daten lohnt sich oft die logit Transformation

$$logit(x) = log\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

```
> logit <- function(x) log(x/(1-x))
```

Für kleine Anteile kann diese durch die log-Transformation approximiert werden.

Das feinste Skalenniveau



Zusammenfassung zu stetigen Daten

- **Lage- und Streuparameter** / quantitativ
- **Punktdiagramm** (stapeln, verzittern) / Daten
- **Histogramm** (Balken varieren) / Verteilungsform
- **Kastendiagramm** / Ausreißer, Streuung, Lage, Symmetrie
- **Q Q-Plot** / Vergleich mit Verteilung
- **Empirische Verteilungsfunktion** / Quantile
- **log-Skala für ratio Daten** / wie modifiziert man die Graphiken
- **logit-Skala für Anteil Daten** / wie modifiziert man die Graphiken